SUSASTRAWAN, MSc.

ANALISIS STRUKTUR DENGAN CARA MATRIKS

DAERAH
TIMUR
13

+ Program Komputer

Penerbit ANDI OFFSET Yogyakarta

572.943
SUS
2

Analisis Struktur Dengan Cara Matriks

F U M I
T. A.
1997 / 1998

Susastrawan M.Sc.

Penerbit ANDI OFFSET Yogyakarta

Proyek Pembinaan Perpustakaan
Jawa Timur
T A. 199 / 1996

Analisis Struktur Dengan Cara MATRIKS
Oleh: Susastrawan M. Sc.

Hak Cipta © 1991, pada penulis,
Dilarang memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini dalam bentuk apapun, tanpa izin tertulis dari penulis.

Edisi Pertama,
Cetakan Pertama, 1991

Penerbit :
ANDI OFFSET
Jl. Beo 38-40, Telp. 61881, 88282
Yogyakarta 55281

Percetakan :
ANDI OFFSET
Jl. Beo 38-40, Telp. 61881, 88282
Yogyakarta 55281

Pusat Penjualan :
— *Unit Kanvas ANDI OFFSET*
Jl. Beo 40, Telp. 61881, 88282
Yogyakarta 55281

— *Steff & Partners*
Jl. Green Ville Blok BG No. 28 Telp. 5604289
Jakarta Barat

ISBN : 979-533-023-3

MILIK
PERPUSTAKAAN DAERAH
JAWA TIMUR
Nomor : 2.329 /PD/ F /1996
Tanggal : 7/3 1996

KATA PENGANTAR

Perkembangan teknologi elektronika khususnya teknologi komputer begitu pesatnya, sehingga boleh dikata setiap kegiatan diberbagai bidang tidak bisa lepas dengan penggunaan komputer. Demikian pula didunia teknik sipil penggunaan peralatan komputer untuk menganalisa berbagai bentuk struktur merupakan kebutuhan yang sulit untuk ditinggalkan.

Cara konvensional untuk menganalisa berbagai bentuk struktur baik Rangka atau Portal telah cukup banyak dikenal, misalnya metode Takabeya, Kani, Hardy Cross, Clapeyron dan sebagainya. Metode-metode tersebut diatas, rumus-rumus dan sifat hitungannya sangat sulit berinteraksi dengan sifat hitungan program komputer. Untuk mengatasi hal itu terdapat suatu metode untuk menganalisa struktur dengan bantuan aljabar matrix. Dengan penggunaan aljabar matrix maka akan sangat mudah berinteraksi dengan peralatan komputer.

Oleh karena itu buku ini pada Bab I menyajikan dasar hitungan aljabar matrix secara garis besar (untuk lebih rincinya dianjurkan mempelajari aljabar matrix pada aljabar linear). Pada Bab II menerangkan analisa struktur dengan metode displesemen, sedang Bab III menyajikan program komputer dengan Fortran yang dapat dipakai untuk menghitung baik Rangka ("Truss") maupun Portal ("Frame"), beserta penjelasan dan cara penggunaannya.

Penulis sangat berterima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan bantuan sehingga dapat tersusunnya buku ini. Saran dan kritik selalu kami harapkan demi kesempurnaan buku ini pada edisi berikutnya.

Penulis

(Ir. Susastrawan, MS)

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR iii
DAFTAR ISI v
BAB I ALJABAR MATRIKS 1
1.1. Pendahuluan 1
1.2. Type Matriks 1
1.2.1. Matriks Baris 1
1.2.2. Matriks Kolom 2
1.2.3. Matriks Bujur Sangkar 2
1.2.4. Matriks Simetri 2
1.2.5. Matriks Diagonal 2
1.2.6. Matriks Satuan 3
1.2.7. Band Matrix 3
1.3. Operasi Aljabar Matriks 3
1.3.1. Penambahan dan Pengurangan Matriks 3
1.3.2. Perkalian Matriks Dengan Sebuah Bilangan 4
1.3.3. Perkalian Matriks Dengan Matriks 4
1.3.4. Transpose Matriks 6
1.3.5. Invers Matrix 7
BAB II ANALISIS STRUKTUR 9
2.1. Deformasi Aksial 9
2.2. Deformasi Lentur 22
2.3. Rangka Batang Bidang ("Truss Element") 39
2.3.1. Persamaan Dasar 39
2.3.2. Matriks Transformasi 40
2.4. Portal Bidang ("Frame Struktures") 53
2.4.1. Batang Yang Mengalami Deformasi Aksial 54
2.4.2. Batang Yang Mengalami Deformasi Lentur 54

2.4.3. Batang Yang mengalami Deformasi Aksial dan Lentur (Portal) 54
2.4.4. Matriks Transformasi 55
2.4.5. Element Actions 58
2.4.6. Fixed end Forces 60
2.4.7. Prosedur Hitungan 61
BAB III PROGRAM KOMPUTER 81
3.1. Penjelasan Program Komputer 96
3.2. Penyusunan Input Data 103
BAB IV APLIKASI PROGRAM KOMPUTER 105
4.1. Konstruksi Portal Bidang 105
4.2. Konstruksi Rangka Bidang 107
4.3. Struktur Dengan Kondisi Pembebanan Lebih Dari Satu ... 110
DAFTAR PUSTAKA 117

BAB I
ALJABAR MATRIKS

1.1 Pendahuluan

Dengan adanya kemajuan yang cukup pesat dalam bidang elektronika, khususnya bidang Komputer, maka proses hitungan dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan banyak menggunakan cara aljabar matriks. Yang disebut matriks dalam hal ini adalah suatu rangkaian unsur yang disusun dalam baris dan kolom. Bila susunan itu terdiri atas m baris dan n kolom, disebut matriks m x n. Bila m dan n sama besar, disebut matriks bujur sangkar ("Square matrix ') secara umum suatu matriks m x n dapat ditulis sebagai berikut:

$$[A] = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Suatu unsur matriks dengan simbol a_{ij} berarti unsur tersebut berada pada baris i dan kolom j.

1.2 Type Matriks

1.2.1 Matriks Baris

Suatu matriks yang hanya terdiri atas satu baris disebut matriks baris

("row matrix "). Cara penulisan biasanya digunakan sepasang kurung kait, sebagai contoh :

$$[A] = [\ a_1 \quad a_2 \quad a_3\ ] \tag{1.2}$$

1.2.2 Matriks Kolom

Suatu matriks yang hanya terdiri atas satu kolom disebut matriks kolom ("Column matrix") Cara penulisan pada umumnya seperti nampak pada contoh sebagai berikut :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

1.2.3 Matriks Bujur Sangkar

Matriks m x n dikatakan matriks bujur sangkar apabila m = n.

Contoh :
$$[A] = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 10 & 2 & 3 \\ 15 & 7 & 5 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

1.2.4 Matriks Simetri

Matriks simetri adalah matriks bujur sangkar bila unsur-unsurnya terhadap diagonal simetri, misal :

$$[A] = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 7 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

1.2.5 Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah suatu matriks dengan unsur-unsurnya nol kecuali unsur-unsur diagonalnya.

Contoh :
$$[A] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

1.2.6 Matriks Satuan

Matriks satuan adalah matriks diagonal dengan semua unsur diagonalnya bernilai satu.

Contoh :
$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

1.2.7 "Band Matrix"

"Band matrix" ialah suatu matriks bujur sangkar dengan unsur-unsur di dekat diagonalnya tidak sama dengan nol.

Contoh :
$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & 9 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

1.3 Operasi Aljabar Matriks

1.3.1 Penambahan dan Pengurangan Matriks

Proses penambahan dan pengurangan matriks hanya dapat berlangsung bila ukuran matriks tersebut sama besar. Penjumlahan/pengurangan dua matriks dilakukan dengan menambahkan/mengurangi unsur-unsur matriks yang sesuai.

Contoh :
$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & -7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & -6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Sifat penjumlahan/pengurangan adalah kedua matriks yang dijumlahkan/dikurangkan dapat ditukar letaknya.

Contoh : $[A] + [B] = [B] + [A]$ (1.9)

1.3.2 Perkalian Matriks dengan Sebuah Bilangan

Perkalian antara sebuah matriks dengan suatu bilangan (misal a) adalah sama dengan perkalian atas unsur-unsur matriks tersebut dengan bilangan itu. Dan letak antara keduanya bisa ditukar.

Contoh : $a[A] = [A]a$ (1.10)

jika $[A] = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

maka $a[A] = \begin{bmatrix} a.4 & a.1 & a.2 \\ a.5 & a.6 & a.8 \end{bmatrix}$

Bila $a = 2$, maka $a[A] = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 10 & 12 & 16 \end{bmatrix}$

1.3.3 Perkalian Matriks dengan Matriks

Suatu matriks dapat dikalikan dengan matriks lain dengan sifat dan syarat perkalian sebagai berikut:

1. Perkalian matriks A dengan matriks B tidak sama dengan perkalian matriks B dengan matriks A.

   $[A][B] \neq [B][A]$ (1.11)

2. Dua matriks A dan matriks B hanya dapat dikalikan dengan cara [A] [B] apabila jumlah kolom matriks [A] sama dengan jumlah baris matriks [B]. Adapun matriks hasil perkaliannya mempunyai jumlah baris matriks [A], dan jumlah kolom sama dengan jumlah kolom matriks B.

Contoh : $[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$[A] \times [B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$[A] \times [B] = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

$$[B] \times [A] \quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22} & b_{11}a_{13}+b_{12}a_{23} \\ b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22} & b_{21}a_{13}+b_{22}a_{23} \\ b_{31}a_{11}+b_{32}a_{21} & b_{31}a_{12}+b_{32}a_{22} & b_{31}a_{13}+b_{32}a_{23} \end{bmatrix}$$

$[A]_{(m \times p)} \times [B]_{(q \times n)} = [C]_{9m \times r}$ p harus sama dengan q (1.12)

$[A]_{(m \times p)} \times [B]_{(q \times r)} \times [C]_{(s \times n)} = [D]_{(m \times n)}$ (1.13)

Syarat : $p = q$
$r = s$

Pada perkalian 3 buah matriks seperti diatas dapat dilakukan dengan mengalikan [A] dan [B] terlebih dahulu, kemudian hasilnya dikalikan dengan [C]. Atau [B] dikalikan terlebih dahulu dengan [C], kemudian matriks [A] dikalikan dengan matriks hasil perkalian [B] dan [C].

Contoh : $([A][B])[C] = [A]([B][C])$ (1.14)

1.3.4 Transpose Matriks

Misal terdapat dua buah matriks [C] dan [D] seperti di bawah ini :

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{dan } [D] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriks [D] dapat diperoleh dengan cara menukar baris dan kolom matriks [C]. Dalam hal ini matriks [D] dikatakan transpose matriks [C] dan dituliskan sebagai :

$$[D] = [C]^T \qquad (1.15)$$

Beberapa sifat transpose matriks :

1. Bila suatu matriks ditranspose dua kali, maka akan diperoleh matriks semula, yaitu :

$$([A]^T)^T = [A] \qquad (1.16)$$

2. Bila transpose dari dua matriks dijumlahkan hasilnya sama dengan transpose hasil penjumlahan kedua matriksnya.

$$[A]^T + [B]^T = ([A] + [B])^T \qquad (1.17)$$

3. Transpose dari suatu perkalian matriks sama dengan perkalian dari transpose masing-masing matriks dengan urutan dibalik.

$$([A][B])^T = [B]^T [A]^T \qquad (1.18)$$

4. Transpose dari suatu matriks simetri sama dengan matriks itu sendiri. Jika matriks [A] simetri, maka

$$[A] = [A]^T \qquad (1.19)$$

Bila [A] matriks *anti simetri* (yaitu suatu matriks dengan unsur-unsur diagonalnya nol dan unsur-unsur terhadap diagonal sama besar tetapi berlainan tanda), maka

$$[A] = -[A]^T \qquad (1.20)$$

5. Hasil kali suatu matriks terhadap matriks transposenya selalu berupa matriks simetri.

$$[A][A]^T = [C] \qquad (1.21)$$

[C] matriks simetri

6. Suatu matriks bujur sangkar selalu dapat diuraikan menjadi penjumlahan dari matriks simetri dan matriks anti simetri.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2{,}5 & 1{,}5 \\ 2{,}5 & 1 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 1{,}5 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{simetri}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ -1{,}5 & -0{,}5 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{anti simetri}}$$

$$[a_{ij}] = [b_{ij}] + [C_{ij}] \qquad (1.22)$$

dengan : $b_{ij} = (\frac{1}{2})(a_{ij} + a_{ji}) \rightarrow$ simetri

$C_{ij} = (\frac{1}{2})(a_{ij} - a_{ji}) \rightarrow$ anti simetri

1.3.5 Invers Matrix

Suatu matriks [A] disebut sebagai inversnya matriks [B] bila hasil kali keduanya merupakan matriks satuan.

$$[A][B] = [I] \qquad (1.23)$$

Langkah-langkah proses invers matriks :

1. Gantikan masing-masing unsur matriks dengan masing-masing nilai kofaktornya.
2. Transposekan matriks yang diperoleh tersebut. Matriks ini kemudian disebut sebagai matriks "adjoint".
3. Hitung nilai determinan (matriks) aslinya.
4. Bagilah unsur-unsur matriks 'Adjoint' dengan nilai determinan matriks aslinya.

Contoh : Inveskanlah matriks [A] berikut ini :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Penjelasan :

1. $A_{11} = 2 \quad A_{12} = -3 \quad A_{21} = -2 \quad A_{22} = 1$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $$\text{Aadj} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Determinan / A / = $2 - 6 = -4$

4. Matriks invers

$$[A]^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}75 & -0{,}25 \end{bmatrix}$$

5. Kontrol :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0{,}5 & +0{,}5 \\ +0{,}75 & -0{,}25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

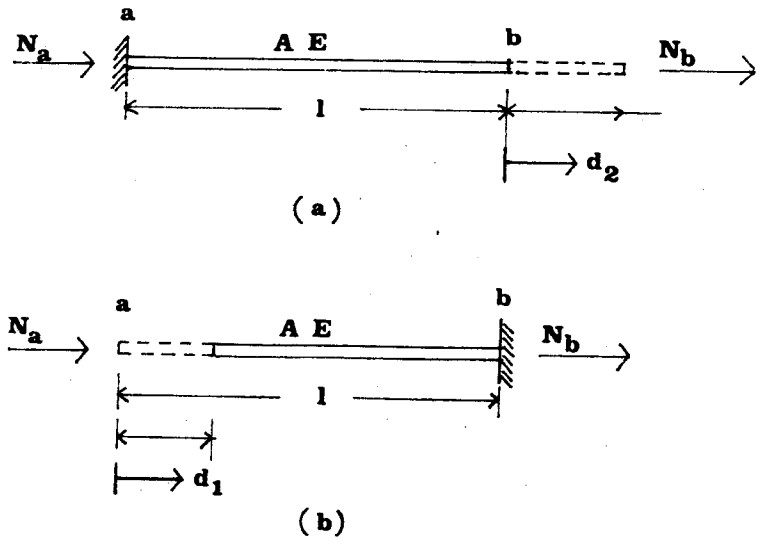
Suatu matriks yang matriks inversnya nol disebut matriks "singular '.

BAB II
ANALISIS STUKTUR

Suatu konstruksi bangunan yang menerima beban luar, baik itu beban pada batang atau beban pada titik buhul, maka konstruktur tersebut akan mengalami deformasi. Secara umum deformasi tersebut berupa : deformasi aksial, lentur dan puntir.

2.1 Deformasi Aksial

Dengan memperhatikan gambar 2.1, sebuah batang dibebani N_a dan N_b pada ujung-ujungnya, maka :



GAMBAR 2.1 Deformasi aksial batang

Syarat keseimbangan pada gambar 2.1.(a)

$$N_a = -\frac{AE}{l}.d_2 \qquad (2.1)$$

$$N_b = \frac{AE}{l}.d_2$$

dan keseimbangan pada gambar 2.1.(b)

$$N_a = +\frac{AE}{l}.d_1 \qquad (2.2)$$

$$N_b = -\frac{AE}{l}.d_1 \qquad (2.2)$$

Dengan menggabungkan persamaan (2.1) dan (2.2), maka akan diperoleh :

$$N_a = +\frac{AE}{l}.d_1 - \frac{AE}{l}.d_2 \qquad (2.3)$$

$$N_b = -\frac{AE}{l}.d_1 + \frac{AE}{l}.d_2$$

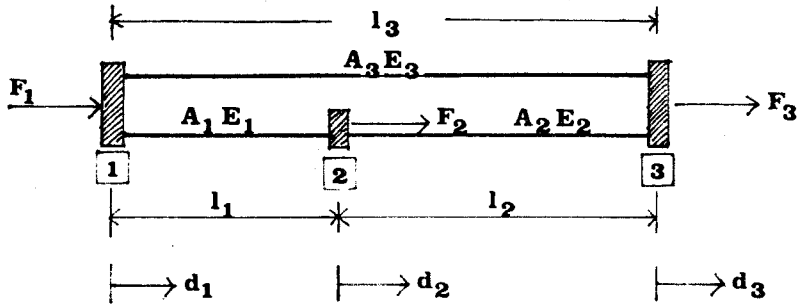
Persamaan (2.3) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} N_a \\ N_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{AE}{l} & -\frac{AE}{l} \\ -\frac{AE}{l} & +\frac{AE}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \qquad (2.3a)$$

atau : $[N] = [k][d]$ (2.3b)

dengan = $[N]$ = matriks beban luar
$[K]$ = matriks kekakuan batang
$[d]$ = matriks displesemen

Jika batangnya lebih dari satu yang dirangkai dalam satu konstruksi.



GAMBAR 2.2 Gabungan Batang

Dari gambar 2.2 nampak :

1, 2	dan	3	adalah nomor titik buhul
F_1 , F_2	dan	F_3	adalah gaya luar
d_1 , d_2	dan	d_3	adalah deformasi pada titik buhul 1, 2 dan 3

Sesuai dengan persamaan (2.3), maka dapat diperoleh :

$$F_1 = +\frac{A_1E_1}{l_1}d_1 - \frac{A_1E_1}{l_1}d_2 + \frac{A_3E_3}{l_3}d_1 - \frac{A_3E_3}{l_3}d_3$$

$$F_2 = -\frac{A_1E_1}{l_1}d_1 + \frac{A_1E_1}{l_1}d_2 + \frac{A_2E_2}{l_2}d_2 - \frac{A_2E_2}{l_2}d_3 \qquad (2.4)$$

$$F_3 = -\frac{A_3E_3}{l_3}d_1 - \frac{A_2E_2}{l_2}d_2 + \frac{A_2E_2}{l_2}d_3 + \frac{A_3E_3}{l_3}d_3$$

Jika $k_1 = \frac{A_1E_1}{l_1}$, $k_2 = \frac{A_2E_2}{l_2}$ dan $k_3 = \frac{A_3E_3}{l_3}$ maka persamaan (2.4) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
F_1 &= (k_1 + k_3)\, d_1 + (-k_1)\, d_2 + (-k_3)\, d_3 \\
F_2 &= (-k_1)\, d_1 + (k_1 + k_2)\, d_2 + (-k_2)\, d_3 \\
F_3 &= (-k_3)\, d_1 + (-k_2)\, d_2 + (k_2 + k_3)\, d_3
\end{aligned}
\qquad (2.5)
$$

atau :

$$
\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & -k_1 & -k_3 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_3 & -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \qquad (2.6)
$$

Dalam keadaan yang sesungguhnya konstruksi seperti nampak pada gambar 2.2 tidak mungkin (karena tidak stabil). Agar stabil harus ada titik yang dipegang (dikonstrain). Misal titik 1 dipegang (dalam bentuk tumpuan), maka $d_1 = 0$. Sehingga persamaan (2.6) menjadi :

$$
\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_3 & -k_1 & -k_3 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_3 & -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \qquad (2.7)
$$

Karena $d_1 = 0$, maka bagian yang diarsir persamaan (2.7) diatas dapat dihilangkan, sehingga persamaan (2.7) menjadi =

$$
\begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \qquad (2.8)
$$

gaya luar — matriks kekakuan system struktur — displesemen yang terjadi

Persamaan (2.8) dapat ditulis dalam bentuk :

$$
\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \qquad (2.9)
$$

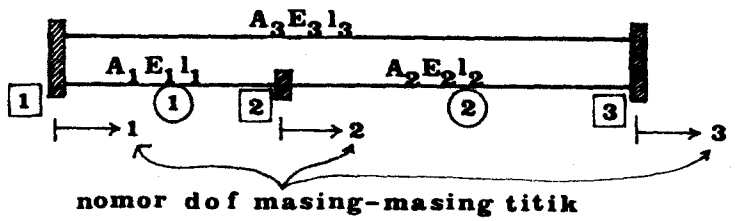
disusun — ditetapkan — dihitung

"Join Code" (JCODE) dan "Member Code" (MCODE)

JCODE adalah satu set angka yang terdiri atas nomor-nomor derajat kebebasan pada suatu titik.

MCODE adalah satu set angka yang terdiri atas nomor-nomor derajat kebebasan pada ujung-ujung suatu batang.

JCODE dan MCODE merupakan alat bantu untuk menyusun matriks kekakuan, matriks beban luar dan untuk keperluan lain. Sebagai contoh akan disusun kembali persamaan (2.6) dengan menggunakan JCODE/MCODE.



GAMBAR 2.3 Derajat kebebasan (d o f)

Dari gambar 2.3 dapat disusun :

JCODE(1) = 1 artinya Joint Code titik 1 = nomor derajat kebebasan 1.

JCODE(2) = 2 artinya Joint Code titik 2 = nomor derajat kebebasan 2.

dan seterusnya

MCODE(1) = [1 2] artinya ujung-ujung batang 1 mempunyai nomor derajat kebebasan (no d o f) 1 dan 2.

MODE(2) = [2 3] artinya ujung-ujung batang 2 mempunyai no d o f 2 dan 3.

MCODE(3) = [1 3] artinya ujung-ujung batang 3 mempunyai no d o f 1 dan 3.

Sistem konstruksi gambar 2.3 diatas mempunyai 3 derajat kebebasan (3 degre of freedom), sehingga matriks kekakuan sistem strukturnya berukuran 3 x 3. Penyusunan matriks kekakuan dilakukan berdasarkan pada persamaan 2.3a dan 2.3b yang merupakan *persamaan dasar untuk struktur yang batang-batangnya hanya mengalami deformasi aksial.*

Penyelesaian :

Batang 1 : MCODE(1) = [1 2]

$$k_1 = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{A_1E_1}{l_1} & -\frac{A_1E_1}{l_1} \\ -\frac{A_1E_1}{l_1} & \frac{A_1E_1}{l_2} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{MCODE } K_{(1)} \Longrightarrow \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{A_1E_1}{l_1} & -\frac{A_1E_1}{l_1} & 0 \\ -\frac{A_1E_1}{l_1} & \frac{A_1E_1}{l_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

matriks kekakuan batang 1

matriks kekakuan sistem struktur sumbangan dari batang 1.

Maksud dari penulisan diatas ialah dengan bantuan MCODE, *matriks kekakuan batang* disusun kedalam matriks *kekakuan sistem struktur.* Dalam hal ini matriks kekakuan sistem struktur berukuran 3 x 3 sesuai dengan jumlah 'degree of freedom' sebesar 3.

Batang 2 : MCODE(2) = [2 3]

$$k_2 = \begin{matrix} \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{A_2E_2}{l_2} & -\frac{A_2E_2}{l_2} \\ -\frac{A_2E_2}{l_2} & \frac{A_2E_2}{l_2} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{MCODE } K_{(2)} \Longrightarrow \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_2E_2}{l_2} & -\frac{A_2E_2}{l_2} \\ 0 & -\frac{A_2E_2}{l_2} & \frac{A_2E_2}{l_2} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Batang 3 : MCODE(3) = [1 3]

$$\begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{A_3E_3}{l_3} & -\frac{A_3E_3}{l_3} \\ -\frac{A_3E_3}{l_3} & \frac{A_3E_3}{l_3} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \quad \text{MCODE } K_{(3)} = \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{A_3E_3}{l_3} & 0 & -\frac{A_3E_3}{l_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A_3E_3}{l_3} & 0 & \frac{A_3E_3}{l_3} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

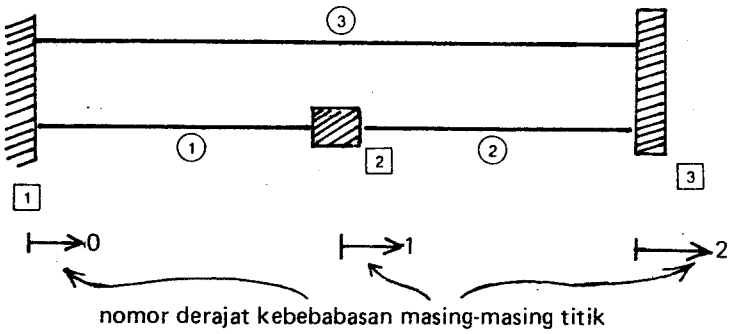
$$K = K_{(1)} + K_{(2)} + K_{(3)}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{A_1E_1}{l_1} & -\frac{A_1E_1}{l_1} & 0 \\ -\frac{A_1E_1}{l_1} & \frac{A_1E_1}{l_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_2E_2}{l_2} & -\frac{A_2E_2}{l_2} \\ 0 & -\frac{A_2E_2}{l_2} & \frac{A_2E_2}{l_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{A_3E_3}{l_3} & 0 & -\frac{A_3E_3}{l_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A_3E_3}{l_3} & 0 & \frac{A_3E_3}{l_3} \end{bmatrix}$$

Jika $k_1 = \frac{A_1E_1}{l_1}$, $k_2 = \frac{A_2E_2}{l_2}$ dan $k_3 = \frac{A_3E_3}{l_3}$, maka

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k & -k_1 & -k_3 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_3 & -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \qquad (2.10)$$

Jika titik buhul 1 dipegang ("constrain"), maka :



GAMBAR 2.4 Derajat kebebasan

Pada titik buhul 1 derajat kebebasannya 0, hal ini berarti titik buhul 1 tidak bergerak karena ditumpu. Dengan demikian jumlah derajat kebebasan dari sistem struktur tersebut adalah 2, dan matriks kekakuan sistem struktur menjadi 2 x 2. Penyelesaian untuk kasus titik buhul 1 dipegang :

Batang 1 : MCODE(1) = [0 1]

$$k_1 = \begin{matrix} 0 & 1 \leftarrow \text{MCODE(1)} \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{A_1E_1}{l_1} & -\frac{A_1E_1}{l_1} \\ -\frac{A_1E_1}{l_1} & \frac{A_1E_1}{l_1} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \quad \text{MCODE K(1)} = \begin{matrix} 1 & 2 \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{A_1E_1}{l_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Batang 2 : MCODE(2) = [1 2]

$$k_2 = \begin{matrix} 1 & 2 \leftarrow \text{MCODE(2)} \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{A_2E_2}{l_2} & -\frac{A_2E_2}{l_2} \\ -\frac{A_2E_2}{l_2} & \frac{A_2E_2}{l_2} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad \text{MCODE K(2)} = \begin{matrix} 1 & 2 \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{A_2E_2}{l_2} & -\frac{A_2E_2}{l_2} \\ -\frac{A_2E_2}{l_2} & \frac{A_2E_2}{l_2} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Batang 3 = MCODE(3) = [0 2]

$$k_3 = \begin{matrix} 0 & 2 \leftarrow \text{MCODE(2)} \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{A_3E_3}{l_3} & -\frac{A_3E_3}{l_3} \\ -\frac{A_3E_3}{l_3} & \frac{A_3E_3}{l_3} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix} \quad \text{MCODE K(3)} = \begin{matrix} 1 & 2 \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_3E_3}{l_3} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$K = K_{(1)} + K_{(2)} + K_{(3)}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{A_1E_1}{l_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{A_2E_2}{l_2} & -\frac{A_2E_2}{l_2} \\ -\frac{A_2E_2}{l_2} & \frac{A_2E_2}{l_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_3E_3}{l_3} \end{bmatrix}$$

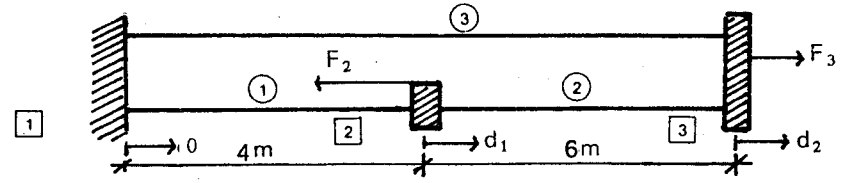
$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \qquad (2.11)$$

(lihat persamaan 2.8)

Contoh :

DIketahui : Konstruksi tergambar

A = 0,5 cm
E = 2.10^6 kg/cm^2
F_2 = 1 ton
F_3 = 1 ton



Proyek Pembinaan Perpustakaan

d_1 = dipakai index 1 agar sesuai dengan no "d o f"nya

d_2 = dipakai index 2 agar sesuai dengan no 'd o f"nya

Displesemen titik buhul 1 = 0, karena ditumpu.

Pertanyaan : Hitung gaya-gaya batang 1, 2 dan 3.

Jawab : Sesuai dengan persamaan 2.8 atau pers 2.11

F = K.d, maka

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \frac{AE}{l_1} = \frac{0{,}5 \cdot 2 \cdot 10^6}{400} = 2500 \text{ kg/cm}$$

$$k_2 = \frac{AE}{l_2} = \frac{0{,}5 \cdot 2 \cdot 10^6}{600} = 1667 \text{ kg/cm}$$

$$k_3 = \frac{AE}{l_3} = \frac{0{,}5 \cdot 2 \cdot 10^6}{1000} = 1000 \text{ kg/cm}$$

dimasukkan kedalam persamaan diatas :

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4167 & -1667 \\ -1667 & 2667 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1000 \\ 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3{,}2 \cdot 10^{-4} & 2 \cdot 10^{-4} \\ 2 \cdot 10^{-4} & 5 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1000 \\ 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$d_1 = 3{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot (-1000) + 2.10^{-4}\, 1000 = -0{,}12$ cm

$d_2 = 2.10^{-4} \cdot (-1000) + 5 \cdot 10^{-4} \cdot 1000 = 0{,}30$ cm

Hal ini berarti d_1 berarah kekiri, atau dengan kata lain titik buhul 2 bergeser kekiri sebesar 0,12 cm.

Menyusun matriks deformasi pada masing-batang.

d^2 = deformasi pada batang 1

MCODE(1) Penjelasan :

$$d^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$$

Jika MCODE = 0, maka d = 0

Jika MCODE = 1, maka $d = d_1$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}12 \end{bmatrix}$$

d^2 = deformasi pada batang 2.

MCODE(2)

$$d^2 = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} -0{,}12 \\ 0{,}30 \end{bmatrix}$$

d^3 = deformasi pada batang 3.

MCODE(3)

$$d^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}30 \end{bmatrix}$$

Menghitung gaya-gaya batang

Batang 1 : $\left[N^1\right] = \left[k^1\right] \left[d^1\right]$

$$\begin{bmatrix} Na^1 \\ Nb^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

$fa^1 = Na^1 = k_1 . 0 + (-k_1) d_1$

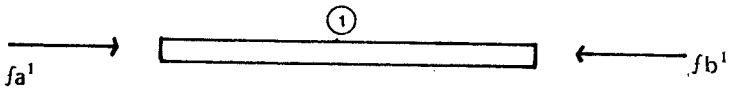
$= 0 - 2500 . (-0,12)$

$= + 300 \text{ kg } (\rightarrow)$

$fb^1 = Nb^1 = (-k_1) 0 + k_1 \quad d_1$

$= 0 + 2500 . (-0,12)$

$= - 300 \text{ kg } (\leftarrow)$



fa^1 = gaya dalam ujung kiri dari batang 1
fb^1 = gaya dalam ujung kanan dari batang 1

Melihat dari arah fa dan fb^1, maka dapat diambil kesimpulan bahwa batang 1 adalah batang tekan.

Batang 2 : $\left[f^2\right] = \left[N^2\right] = \left[k^2\right] \left[d^2\right]$

$$\begin{bmatrix} fa^2 \\ fb^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$fa^2 = k_2 d_1 - k_2 d_2$

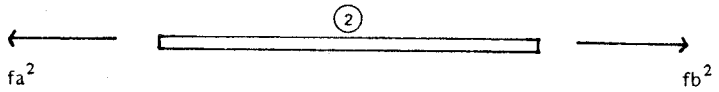
$= 1667 . (-0,12) - 1667 (0,30)$

$= - 700 \text{ kg } (\leftarrow)$

$fb^2 = (-k_2) d_1 + k_2 d_2$

$= (-1667) (-0,12) + 1667 (0,30)$

$= 700 \text{ kg}$



Melihat arah fa^2 dan fb^2 maka dapat diambil kesimpulan bahwa batang 2 adalah batang tarik.

Batang 3 : $\left[f^3\right] = [k^3] \left[d^3\right]$

$$\begin{bmatrix} fa^3 \\ fb^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$fa^3 = k_3 . 0 + (-k_3) d_2$

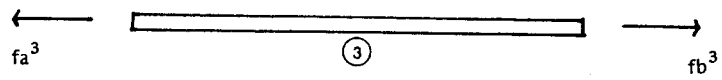
$= 0 - 1000 . 0,30$

$= - 300 \text{ kg } (\leftarrow)$

$fb^3 = (-k_3) 0 + k_3 . d_2$

$= 0 + 1000 . 0,30$

$= + 300 \text{ kg } (\rightarrow)$



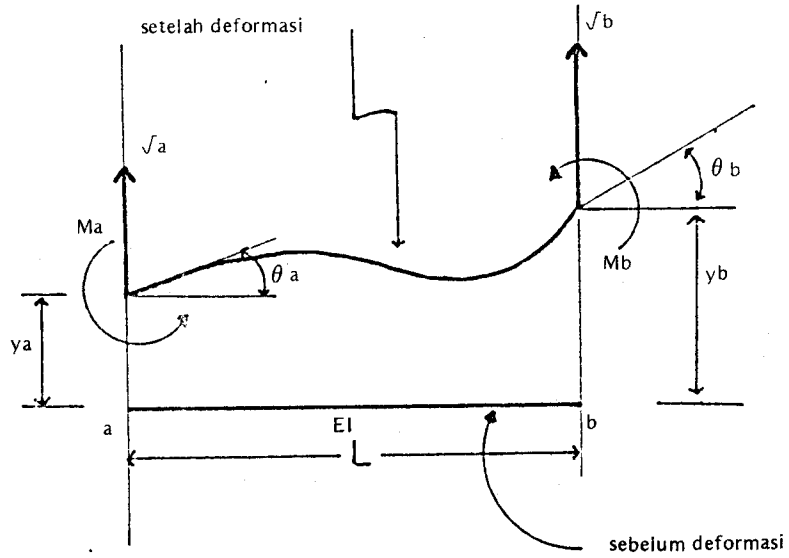
Melihat arah fa^3 dan fb^3, maka berarti batang 3 adalah batang tarik.

Reaksi perletakan = Σ gaya normal batang-batang yang berhubungan.

$R = fa^1 + fa^3 = 300 - 300 = 0$ ton

Melihat proses hitungan diatas maka dapat diambil kesimpulan bahwa dalam analisis struktur dengan cara matriks, untuk dapat menghitung gaya-gaya dalam tiap-tiap batang harus terlebih dahulu menghitung deformasi titik-titik buhulnya. Atau dengan kata lain gaya-gaya dalam tiap-tiap batang merupakan fungsi dari deformasi/displesemen titik buhulnya.

2.2 Deformasi Lentur



GAMBAR 2.5 Batang Lentur

Untuk memperoleh persamaan dasar batang lentur dapat diturunkan dari persamaan "slope-deflection".

Persamaan 'slope-deflection":

$$Ma = \frac{2EI}{L}(2\theta a + \theta b - 3\Psi ab) \quad (2.12)$$

$$Mb = \frac{2EI}{L}(2\theta b + \theta b - 3\Psi ab)$$

dengan

$$\Psi ab = \frac{1}{L}(Yb - Ya) \quad (2.13)$$

Agar memenuhi syarat keseimbangan, maka :

$$Va = \frac{1}{L}(Ma + Mb) \quad (2.14)$$

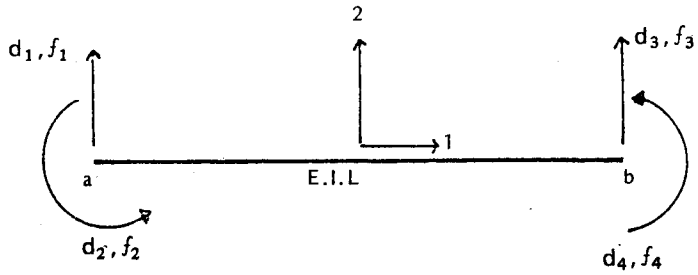
$$Vb = -Va$$

Dengan mengkombinasikan persamaan (2.12), (2.13) dan (2.14), maka akan dapat diperoleh :

$$\begin{aligned} Va &= \alpha\,(12\,Ya + 6L\theta a - 12\,Yb + 6L\theta b) \\ Ma &= \alpha\,(6L\,Ya + 4L^2\theta a - 6L\,Yb + 2L^2\theta b) \\ Vb &= \alpha\,(-12\,Ya - 6L\theta a + 12\,Yb - 6L\theta b) \\ Mb &= \alpha\,(6L\,Ya + 2L^2\theta a - 6L\,Yb + 4L^2\theta b) \end{aligned} \quad (2.15)$$

dengan $\alpha = \frac{EI}{L^3}$

Untuk memudahkan proses hitungan dengan metode matriks, maka indeks pada persamaan (2.15) diganti dengan nomor urut. Begitu pula notasi yang lain diganti sesuai dengan gambar 2.6 dibawah ini.



GAMBAR 2.6 Batang Lentur (bentuk matriks)

Arah gaya maupun deformasi pada gambar 2.6 adalah arah-arah positif.

Dengan demikian persamaan 2.15 dapat disusun kembali menjadi :

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} \qquad (2.16)$$

dengan $\alpha = \dfrac{EI}{L^3}$

Persamaan 2.16 disebut *persamaan dasar* batang lentur.

Persamaan 2.16 secara simbolis dapat dituliskan sebagai berikut :

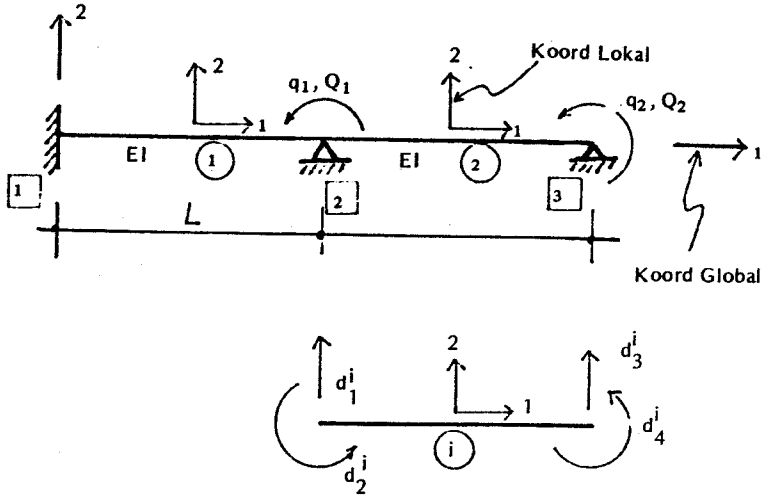
$$f = k\ d \qquad (2.17)$$

dengan

$$k = \alpha \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \frac{EI}{L^3} \qquad (2.17a)$$

Contoh Soal 1 :

Pada kasus balok menerus sistem koordinat lokal dan koordinat global adalah sama, maka matriks kekakuan batang (persamaan 2.17 a) dapat langsung digunakan sebagai matriks kekakuan pada sistem koordinat global tanpa transformasi koordinat.



GAMBAR 2.7 Contoh soal (a) balok menerus
(b) element batang

Diambil Q_1 = 14 tm dan Q_2 = 0

1. 'Unknowns ' (Faktor yang tidak diketahui)

Seperti sudah dijelaskan dimuka bahwa dalam analisis struktur dengan matriks, untuk dapat menghitung gaya-gaya batang harus dihitung dahulu deformasi/displesemen tiap-tiap titik buhulnya. Pada kasus batang lentur, setiap titik buhul dapat berdeformasi/berdisplesemen dalam dua arah yaitu vertikal (naik/turun) dan berputar (searah/berlawanan jarum jam) seperti nampak pada gambar 2.6.

Pada contoh soal ini (lihat gambar 2.7), deformasi/displesemen yang mungkin terjadi adalah :

- titik buhul 1 : vertikal, *tidak bisa* karena ditumpu
  berputar, *tidak bisa* karena dijepit
- titik buhul 2 : vertikal, *tidak bisa* karena ditumpu
  berputar, *bisa* karena tumpuan sendi ($=q_2$)
- titik buhul 3 : vertikal, *tidak bisa* karena ditumpu
  berputar, *bisa* karena tumpuan sendi ($=q_2$)

Dengan demikian dalam hal ini ada 2 kemungkinan deformasi/displesemen yaitu q_1 dan q_2. Sistem struktur yang demikian dikatakan mempunyai 2 derajat kebebasan (2 "d o f"). Sehingga sebagai "unknowns" dalam hal ini adalah :

$$q_k\ ,\ k = 1, 2 \qquad (2.18)$$

2. 'Elemen Models '!

Pada tiap-tiap batang berlaku persamaan dasar, yaitu persamaan (2.16), (2.17).

$$f^i = k\,d^i,\ i = 1, 2 \qquad (2.19)$$

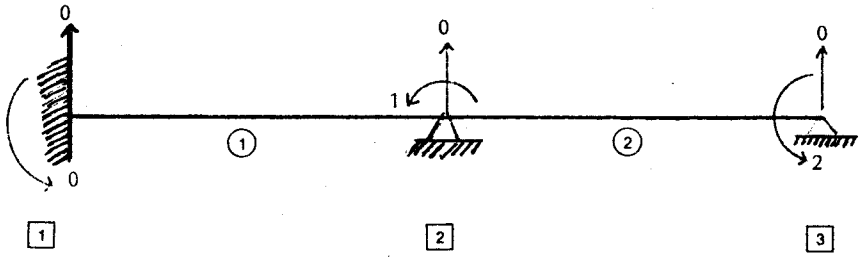
dengan

$$k = \alpha \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix},\ \alpha = \frac{EI}{L^3} \qquad (2.19a)$$

3. "System Models"

Satu sistem struktur adalah merupakan penggabungan dari beberapa batang dan harus memenuhi syarat kompatibilitas dan keseimbangan. Kondisi kompatibel dapat dinyatakan dengan "member code"(MCODE).

Menentukan JCODE dan MCODE



GAMBAR 2.8 JCODE dan MCODE

Angka nol pada gambar 2.8 dimaksud bahwa titik buhul tidak bisa bergerak arah tersebut.

JCODE(1) = [0 0] MCODE(1) = [0 0 0 1]

JCODE(2) = [0 0] MCODE(2) = [0 1 0 2]

JCODE(3) = [0 2]

MCODE(1)

$$D^1 = d^1 = \begin{bmatrix} d_1{}^1 \\ d_2{}^1 \\ d_3{}^1 \\ d_4{}^1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix} \qquad (2.20)$$

D^1 = displesemen batang 1 pada sistem koordinat global

d^1 = displesement batang 1 pada sistem koordinat lokal

Dalam hal ini $D^1 = d^1$ karena sistem koordinat global sama dengan sistem koordinat lokal.

$$D^2 = d^2 = \begin{bmatrix} d_1{}^2 \\ d_2{}^2 \\ d_3{}^2 \\ d_4{}^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q_1 \\ 0 \\ q_2 \end{bmatrix} \qquad (2.21)$$

Untuk tiap-tiap batang berlaku rumus f = k d , maka pada sistem struktur juga berlaku rumus :

$$F = K\,.\,D \qquad (2.22)$$

F = matriks beban luar

K = matriks kekakuan sistem struktur

D = matriks displesemen titik buhul pada koordinat global

$$F = \bar{F} - \hat{F} \qquad (2.23)$$

$\bar{F}$ = beban pada titik buhul ("joint loads")

$\hat{F}$ = beban pada batang (dihitung dari "fixed end forces")

NE

$$K = \sum_{i=1} K^{(i)} \qquad (2.34)$$

NE = "Number of Element" (=jumlah batang)

Menyusun matriks beban luar :

A. Beban pada titik buhul

– titik 1 : $F_1 = \begin{bmatrix} F_1^{\,1} \\ F_2^{\,1} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$ (JCODE(1)) $\xRightarrow{\text{JCODE}}$ $F^{(1)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$

sesuai dengan d o f

– titik 2 : $F^2 = \begin{bmatrix} F_1^{\,2} \\ F_2^{\,2} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$ $\xRightarrow{\text{JCODE}}$ $F^{(2)} = \begin{bmatrix} F_2^{\,2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$

$= \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$

– titik 3 : $F^3 = \begin{bmatrix} F_1^{\,3} \\ F_2^{\,3} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}$ $\xRightarrow{\text{JCODE}}$ $F^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2^{\,3} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 \\ Q_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^{NJ} \bar{F}(i) = \bar{F}(1) + \bar{F}^{m}(2) + \bar{F}(3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.25)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

B. Beban pada batang (dihitung dengan "fixed end forces").

– batang 1 : $F^1 = \begin{bmatrix} F_2^2 \\ F_2^2 \\ F_3^1 \\ F_4^1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$ (MCODE(1)) $\xRightarrow{\text{MCODE}}$ $F^{(1)} = \begin{bmatrix} F_4^1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$

– batang 2 : $F^2 = \begin{bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \\ F_3^2 \\ F_4^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$ (MCODE(2)) $\xRightarrow{\text{MCODE}}$ $F^{(2)} = \begin{bmatrix} F_2^2 \\ F_4^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$

$$\hat{F} = \sum_{i=1}^{NE} \hat{F}(i) = \hat{F}(1) + \hat{F}(2) \qquad (2.26)$$

$$= \begin{bmatrix} F_4^1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_2^2 \\ F_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \bar{F} - \hat{F} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

$Q_1 = 14$ tm dan $Q_2 = 0$, maka

$$F = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Menyusun matriks kekakuan sistem struktur

$$K = k = \alpha \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}, \alpha = \frac{ET}{L^3}$$

$$K^1 = \alpha \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \leftarrow \text{MCODE(1)} \end{matrix}$$

$$\Longrightarrow K^{(1)} = \alpha \begin{bmatrix} 4L^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix}$$

$$K^2 = \alpha \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & -2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 2 \leftarrow \text{MCODE(2)} \end{matrix}$$

$$\Longrightarrow K^{(2)} = \alpha \begin{bmatrix} 4L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix}$$

$$K = \sum_{i=1}^{NE} K^{(i)} = K^{(1)} + K^{(2)} \qquad (2.27)$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} 4L^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 4L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} 8L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Sesuai persamaan 2.22, maka :

$$\alpha \begin{bmatrix} 8L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.28)$$

4. Penyelesaian persamaan

Penyelesaian persamaan (2.28) menghasilkan

$$q_1 = \frac{2}{\alpha L^2}, \quad q_2 = -\frac{1}{\alpha L^2}$$

5. Gaya-gaya batang (diambil L = 5 m)

– Batang 1 :

Sesuai pers (2.20), maka

$$d^1 = \begin{bmatrix} d_1^1 \\ d_2^1 \\ d_3^1 \\ d_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{\alpha L^2} \end{bmatrix}$$

Sesuai pers (2.19), maka :

$$f^1 = \alpha \begin{bmatrix} 6L \\ 2L^2 \\ -6L \\ 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{\alpha L^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}4 \\ 4{,}0 \\ -2{,}4 \\ 8{,}0 \end{bmatrix}$$

– Batang 2 :

Sesuai pers (2.21), maka :

$$d^2 = \begin{bmatrix} d_2^2 \\ d_2^2 \\ d_3^2 \\ d_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q_1 \\ 0 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{\alpha L^2} \\ 0 \\ -\frac{1}{\alpha L^2} \end{bmatrix}$$

Dengan pers (2.19) akan diperoleh ;

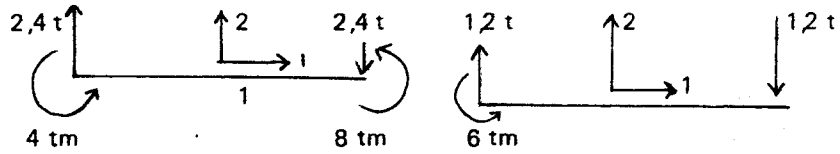
$$f^2 = \alpha \begin{bmatrix} 6L & 6L \\ 4L^2 & 2L^2 \\ -6L & -6L \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{\alpha L^2} \\ 0 \\ -\frac{1}{\alpha L^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 6,0 \\ -1,2 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

6. "Joint Forces" (gaya-gaya pada titik buhul).

Gaya-gaya pada titik buhul dihitung dari gaya-gaya batang pada sistem koordinat global. Karena dalam hal ini sistem koordinat lokal dan global sudah sesuai maka tidak perlu transformasi koordinat. Dengan kata lain gaya pada titik buhul dapat dihitung langsung dari gaya batang pada sistem koordinat lokal, maka :

$$P_1 = f_a^1 \; , \; P^2 = f_b^1 + f_a^1 \; , P_3 = f_b^2 \qquad (2.29)$$

"Free body" dengan



GAMBAR 2.9 Gaya Batang

Sesuai gambar 2.9, maka :

$$f^1 = \begin{bmatrix} f_a^1 \\ f_b^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,4 \\ 4,0 \\ -2,4 \\ 8,0 \end{bmatrix} \quad , f^2 = \begin{bmatrix} f_a^2 \\ f_b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 6,0 \\ -1,2 \\ 0,0 \end{bmatrix} \qquad (2.30)$$

Sehingga,

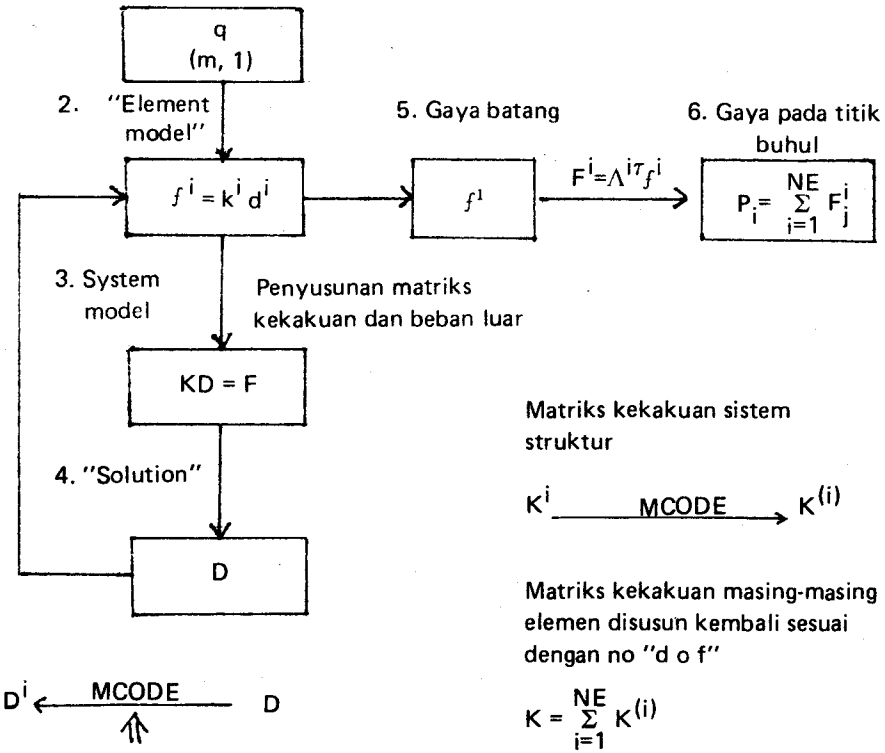
$$P_1 = f_a^1 = \begin{bmatrix} 2,4 \\ 4,0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = f_b^1 + f_a^2 = \begin{bmatrix} -2,4 \\ 8,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,2 \\ 6,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,2 \\ 14,0 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = f_b^2 = \begin{bmatrix} -1,2 \\ 0,0 \end{bmatrix}$$

Prosedur perhitungan pada metode displesemen tanpa beban pada batang :

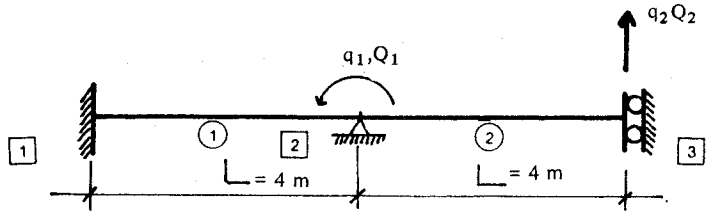
1. "Un knowns"



Gambar 2.10 Prosedur Hitungan

Contoh Soal 2:

Balok menerus pada gambar 2.11 dibebani dengan beban titik sebesar Q_1 = 30 tm, Q_2 = 0.



GAMBAR 2.11 Balon Menerus

Hitung : Gaya-gaya batang.

Penyelesaian:

1. "Unknowns"

   Seperti sudah dijelaskan dimuka bahwa sebagai "unknowns" adalah displesemen pada "joint".

   $$q_k, \quad k = 1, 2$$

2. "Element Models"

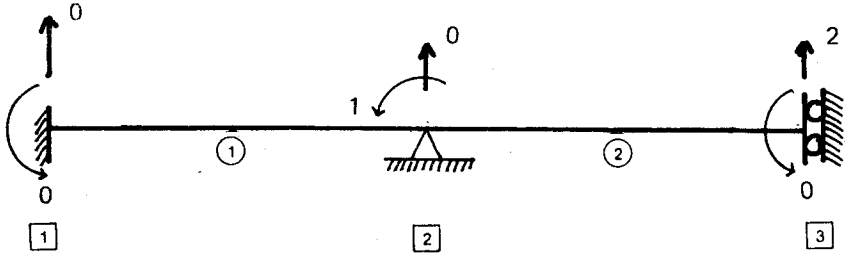
   Persamaan dasar untuk tiap batang ("element")

   $$f^i = k\, d^i, \quad i = 1,2$$

   k adalah seperti pada persamaan (2.19a)

3. "System Model"

   – Menyusun JCODE dan MCODE



GAMBAR 2.12 JCODE dan MCODE

JCODE(1) = [0 0]
JCODE(2) = [0 1]
JCODE(3) = [2 0]

MCODE(1) = [0 0 0 1]
MCODE(2) = [0 1 2 0]

– Menyusun matriks kekakuan sistem struktur:

Batang 1.

$$K^1 = k = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \leftarrow \text{MCODE(1)}$$

$$\text{MCODE } K^{(1)} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 4L^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$K^{(1)}$ = dapat diartikan sebagai sumbangan kekakuan batang 1 terhadap kekakuan sistem struktur.

Batang 2.

$$K^2 = k = \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \qquad \text{MCODE(2)}$$

$$\text{MCODE } K^{(2)} = \alpha_2 \begin{bmatrix} 4L^2 & -6L \\ -6L & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$K = \sum_{i=1}^{2} K^{(i)} = K^{(1)} + K^{(2)}$$

$$= \alpha_1 \begin{bmatrix} 4L^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 4L^2 & -6L \\ -6L & 12 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 8L^2 & -6L \\ -6L & 12 \end{bmatrix}$$

– Menyusun matriks beban luar

A. Beban pada titik buhul

– titik 1 : $\bar{F}^1 = \begin{bmatrix} \bar{F}_1^1 \\ \bar{F}_2^1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$ JCODE $\bar{F}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$

– titik 2 : $\bar{F}^2 = \begin{bmatrix} \bar{F}_1^2 \\ \bar{F}_2^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$ JCODE $\bar{F}(2) = \begin{bmatrix} \bar{F}_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$

$= \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$

– titik 3 : $\bar{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1^3 \\ \bar{F}_2^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}$ JCODE $\bar{F}(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{F}_1^3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 \\ Q_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^{3} \bar{F}(i) = \bar{F}(1) + \bar{F}(2) + \bar{F}(3)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

B. Beban pada batang

Dalam kasus soal ini beban pada batang tidak ada, sehingga $\hat{F} = 0$.

$$F = \bar{F} + \hat{F} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh (dari persamaan F = KD) :

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 8L^2 & -6L \\ -6L & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

4. Penyelesaian persamaan diatas, menghasilkan:

$$D_1 = \frac{6}{\alpha L^2}, \quad D_2 = \frac{3}{\alpha L}$$

5. Gaya- gaya batang ("Element Forces")

– Displesemen pada masing-masing batang :

Batang 1 :

$$D^1 = \begin{bmatrix} D_1^1 \\ D_2^1 \\ D_3^1 \\ D_4^1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{6}{\alpha L^2} \end{bmatrix}$$

karena koordinat lokal dan global sudah sesuai, sehingga tidak memerlukan transformasi koordinat, maka $d^1 = D^1$.

Batang 2 :

$$D^2 = \begin{bmatrix} D_1^2 \\ D_2^2 \\ D_3^2 \\ D_4^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_1 \\ D_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{6}{\alpha L^2} \\ \frac{3}{\alpha L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$d^2 = D^2$

– Gaya-gaya batang :

Dengan persamaan 2.19, jika diambil L = 4 m akan diperoleh :

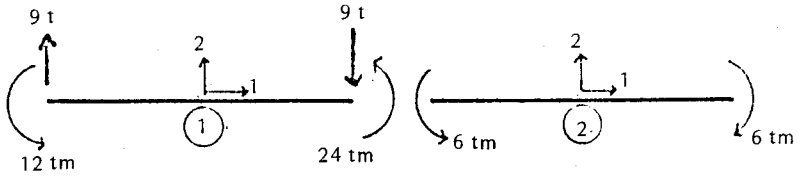
Batang 1 :

$$f^1 = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ f_4^1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{6}{\alpha L^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9{,}0 \\ 12{,}0 \\ -9{,}0 \\ 24{,}0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_a^1 \\ f_b^1 \end{bmatrix}$$

Batang 2 :

$$f^2 = \begin{bmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_4^2 \\ f_4^2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 6L & -12 \\ 4L^2 & -6L \\ -6L & 12 \\ 2L^2 & -6L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{6}{\alpha L^2} \\ \dfrac{3}{\alpha L} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0 \\ 6{,}0 \\ 0{,}0 \\ -6{,}0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_a^2 \\ f_b^2 \end{bmatrix}$$

"Free body" diagram



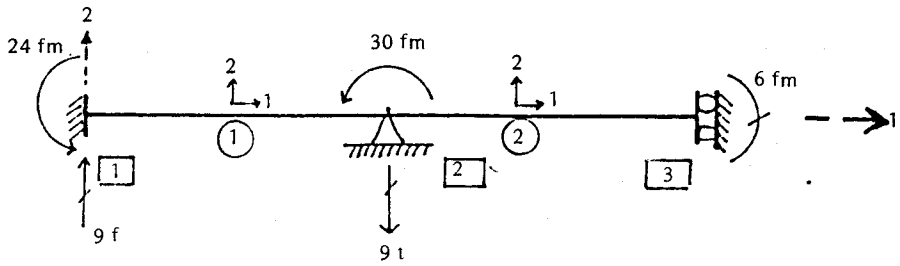
GAMBAR 2.13 "Free Body"

6. Gaya-gaya pada titik buhul ("Joint Forces")

$P_1 = f_a^1$, $P_2 = f_b^1 + f_a^2$, $P_3 = f_b^2$.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 9{,}0 \\ 12{,}0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} -9{,}0 \\ 24{,}0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}0 \\ 6{,}0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9{,}0 \\ 30{,}0 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0{,}0 \\ -6{,}0 \end{bmatrix}$$



GAMBAR 2.14 "Joint Forces"

2.3. Rangka Batang Bidang ("Truss Element")

Rangka batang bidang didefinisikan sebagai konstruksi rangka dengan titik-titik buhulnya berupa sendi (dianggap sendi). Sehingga deformasi yang terjadi pada batang-batangnya akibat beban luar adalah hanya deformasi aksial.

Pada bab 2.1 telah dibicarakan dan dijabarkan persamaan dasar suatu batang yang mengalami deformasi aksial. Pada bab 2.3 ini persamaan dasarnya adalah sama dengan pada bab 2.1, sedang perbedaannya adalah pada rangka batang bidang arah kedudukan batang-batangnya sembarang. Dengan kata lain sistem koordinat masing-masing batangnya tidak selalu sama dengan sistem koordinat strukturnya. Sehingga untuk menganalisis konstruksi ini diperlukan transformasi koordinat.

2.3.1 Persamaan dasar

GAMBAR 2.15 "Element" Rangka

Arah gaya dan displesemen yang tampak pada gambar 2.15 adalah arah positif. Sesuai dengan persamaan (2.3), maka :

$$f = k\, d \tag{2.31}$$

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \frac{AE}{L} \tag{2.32}$$

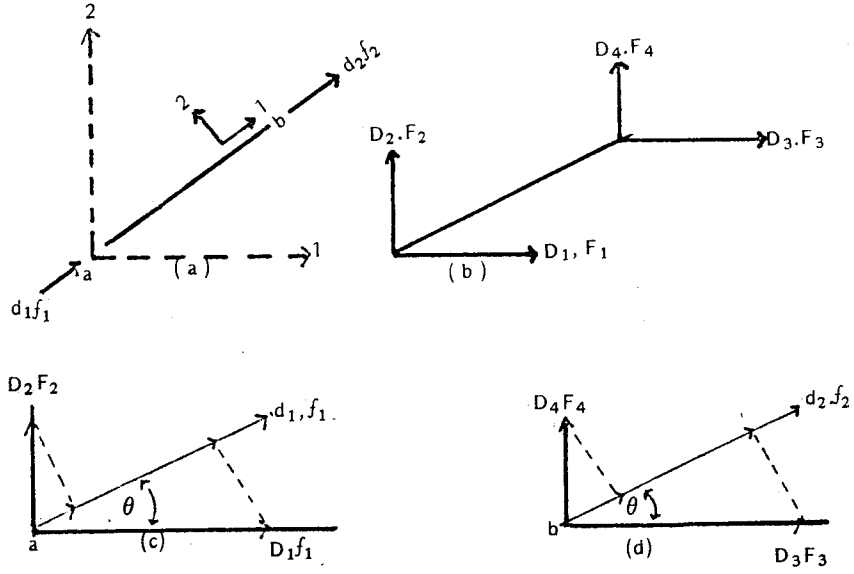
dengan : $k = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\gamma = \frac{AE}{L}$

atau : $k = \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix}$ (2.33)

2.3.2 Matriks Transformasi

Seperti sudah disebutkan diatas bahwa arah kedudukan batang-batang Rangka Batang Bidang adalah sembarang, sehingga kedudukan Rangka Batang Bidang secara umum dapat dilihat pada gambar 2.16.

Garis putus-putus pada gambar 2.16 menunjukkan Sistem Koordinat Global (sistem koordinat struktur). Pada umumnya sumbu 1/sumbu X diambil horisontal dan sumbu 2/sumbu y diambil vertikal. Sedang sistem Koordinat Lokal digambarkan dengan garis penuh, sumbu 1/sumbu x diambil sumbu tiap batang dan sumbu 2/sumbu y diambil tegak lurus sumbu batang.



GAMBAR 2.16. a) Kondisi lokal
b) Kondisi global
c) Transformasi ujung a
d) Transformasi ujung b

Gambar 2.16a menunjukkan gaya dan deformasi pada sistem koordinat lokal, sedang gambar 2.16b pada sistem koordinat global. Dari gambar 2.16c akan dapat diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$d_1 = D_1 \cos\theta + D_2 \sin\theta \qquad (2.34)$$

dalam bentuk matriks :

$$d_1 = [\cos\theta \ \ \sin\theta] \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \qquad (2.35)$$

Dari gambar 2.16 c dan analoog dengan pers (2.35) dapat diperoleh :

$$d_2 = [\cos\theta \qquad \sin\theta] \begin{bmatrix} D_3 \\ D_4 \end{bmatrix} \qquad (2.36)$$

Untuk memudahkan dalam penjelasan lebih lanjut ujung-ujung batang biasa disebut dengan ujung *a* dan ujung *b* seperti nampak pada gambar (2.16a). Dengan demikian persamaan 2.35 dan 2.36 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$d_a = [c \qquad s] \ Da \qquad (2.37)$$
$$d_b = [c \qquad s] \ Db$$

dengan : $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$

$$Da = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \ , \ D_b = \begin{bmatrix} D_3 \\ D_4 \end{bmatrix}$$

Jika diambil $\lambda = [c \ \ s]$, maka persamaan (2.37) dapat dituliskan :

$$\begin{bmatrix} d_a \\ d_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_a \\ D_b \end{bmatrix} \qquad (2.38)$$

λ = matriks transformasi

Untuk menyederhanakan penulisan dan penjabaran lebih lanjut persamaan (2.38) sering dituliskan sebagai berikut :

$$[d] = [\Lambda] [D] \qquad (2.39)$$

dengan : $\left[d\right] = \begin{bmatrix} d_a \\ d_b \end{bmatrix}$, $[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\left[D\right] = \begin{bmatrix} D_a \\ D_b \end{bmatrix}$

Analoog dengan persamaan (2.38), akan dapat disusun persamaan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} f_a \\ f_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_a \\ F_b \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

atau :

$$\left[f\right] = [\Lambda] \left[F\right] \tag{2.41}$$

Dari persamaan (2.38) dan (2.40) dapat diperoleh :

$$\begin{bmatrix} D_a \\ D_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^T & 0 \\ 0 & \lambda^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_a \\ d_b \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

atau

$$\left[D\right] = [\Lambda]^T \left[d\right] \tag{2.43}$$

dan

$$\begin{bmatrix} F_a \\ F_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^T & 0 \\ 0 & \lambda^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

atau

$$\left[F\right] = [\Lambda]^T \left[f\right] \tag{2.45}$$

Dari persamaan (2.3) dan (2.45) akan diperoleh :

$$\left[F\right] = \Lambda^T k d \tag{2.46}$$

Dari persamaan (2.46) dan (2.39), dapat diperoleh :

$$F = \Lambda^T k \Lambda D \tag{2.47}$$

Persamaan (2.47) identik dengan persamaan (2.22), sehingga diperoleh :

$$K = \Lambda^T k \Lambda \tag{2.48}$$

sehingga,

$$K = \begin{bmatrix} \lambda^T & 0 \\ 0 & \lambda^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \lambda^T k_{aa} \lambda & \lambda^T k_{ab} \lambda \\ \hline \lambda^T k_{ba} \lambda & \lambda^T k_{bb} \lambda \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} K_{aa} & K_{ab} \\ \hline K_{ba} & K_{bb} \end{array}\right] \tag{2.49}$$

dengan :
$$\begin{aligned} K_{aa} &= \lambda^T k_{aa} \lambda \\ K_{ab} &= \lambda^T k_{ab} \lambda \\ K_{ba} &= \lambda^T k_{ba} \lambda \\ K_{bb} &= \lambda^T k_{bb} \lambda \end{aligned} \tag{2.50}$$

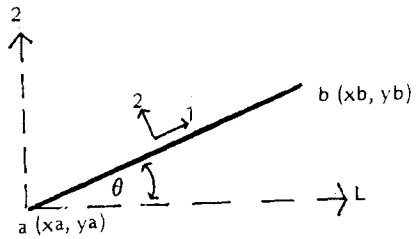
Dengan $\lambda = [\, c \quad s \,]$ dan dari persamaan (2.33) maka akan diperoleh :

$$[K] = \gamma \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} , \gamma = \frac{AE}{L} \tag{2.51}$$

[K] adalah matriks kekakuan "element" (batang) pada sistem koordinat global.

Cara menghitung matriks transformasi :

1. θ pada kwadran I

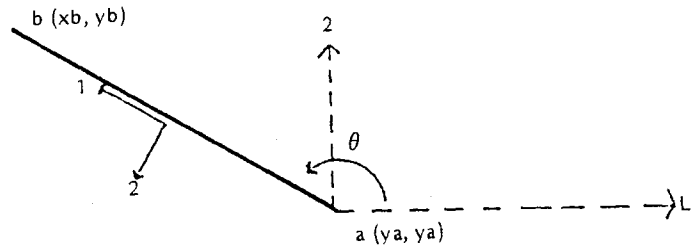


GAMBAR 2.17 Kwadran I

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{X_b - X_a}{L} \quad \text{(positif)}$$

$$\text{Sin}\,\theta = \frac{Y_b - Y_a}{L} \quad \text{(positif)} \qquad (2.52)$$

2. θ pada kwadran II

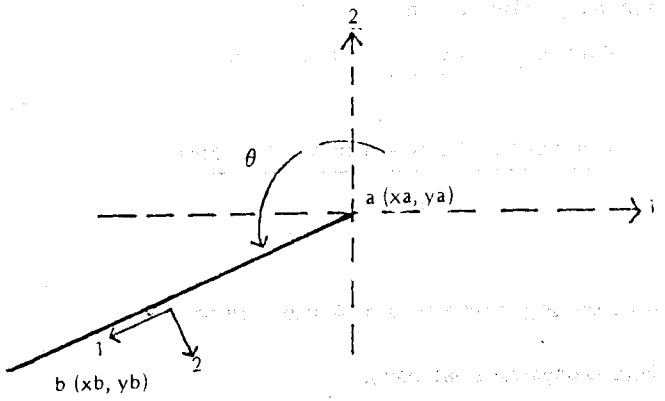


GAMBAR 2.18 Kwadran II

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{X_b - X_a}{L} \quad \text{(negatif)}$$

$$\text{Sin}\,\theta = \frac{Y_b - Y_a}{L} \quad \text{(positif)} \qquad (2.52)$$

3. θ pada kwadran III

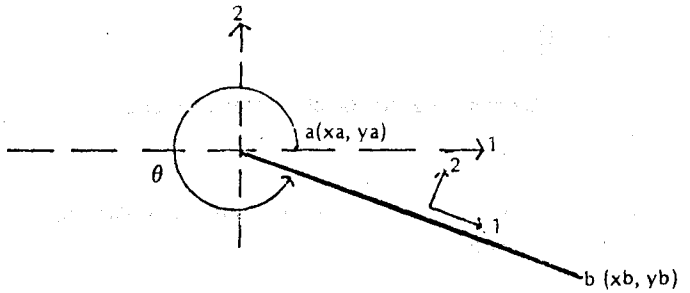


GAMBAR 2.18 Kwadran III

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{X_b - X_a}{L} \quad \text{(negatif)}$$

$$\text{Sin}\,\theta = \frac{Y_b - Y_a}{L} \quad \text{(negatif)} \qquad (2.53)$$

4. θ pada kwadran IV



GAMBAR 2.19 Kwadran IV

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{X_b - X_a}{L} \quad \text{(positif)}$$

$$\text{Sin}\,\theta = \frac{Y_b - Y_a}{L} \quad \text{(negatif)} \qquad (2.54)$$

Berdasarkan analisis diatas, dapat diambil kesimpulan bahwa dapat dibentuk suatu persamaan yang berlaku umum :

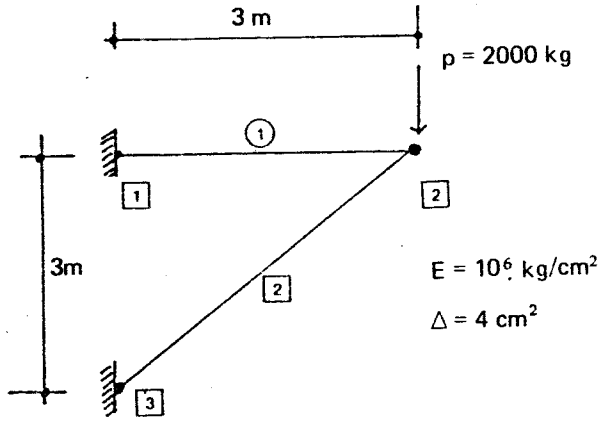
$$\text{Cos } \theta = \frac{\text{X nomor titik besar} - \text{X nomor titik kecil}}{L} \qquad (2.55)$$

$$\text{Sin } \theta = \frac{\text{Y nomor titik besar} - \text{Y nomor titik kecil}}{L}$$

Contoh 1 :

Diketahui konstruksi rangka seperti nampak pada gambar 2.20.

Pertanyaan : Hitung gaya-gaya batangnya.



GAMBAR 2.20 Rangka Batang Bidang

Penyelesaian:

1. Variabel yang tidak diketahui (yang harus dihitung) dalam hal ini adalah displesemen horisontal dan vertikal di titik 2, yaitu:

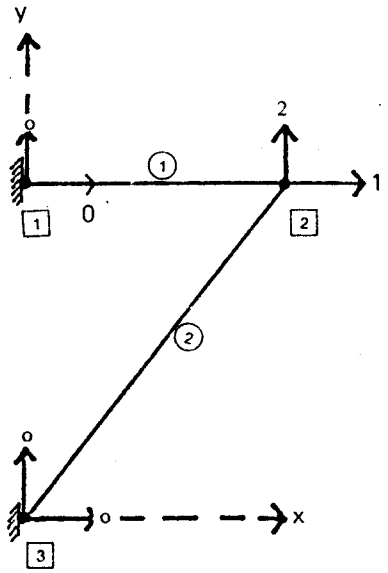
   $D_k, \; k = 1, 2$

2. Persamaan dasar masing-masing batang adalah :

   $f^i = k^i d^i, \; i = 1, 2$

3. Menyusun persamaan sistem struktur.

   – Menentukan JCODE dan MCODE



JCODE(1) = [0 0]
JCODE(2) = [1 2]
JCODE(3) = [0 0]

MCODE(1) = [0 0 1 2]
MCODE(2) = [1 2 0 0]

– Menghitung matriks transformasi tiap-tiap elemen/batang.

Batang 1 : $\lambda^1 = [\cos \theta \; \sin \theta]$

$$\text{Cos } \theta = \frac{X_2 - X_1}{L} = \frac{3 - 0}{3} = 1$$

$$\text{Sin } \theta = \frac{Y_2 - Y_1}{L} = \frac{3 - 3}{3} = 0 \qquad \text{(pers 2.55)}$$

$\lambda^1 = [1 \quad 0]$

Batang 2 : $\lambda^2 = [\cos \theta \; \sin \theta]$

$$\text{Cos } \theta = \frac{X_3 - X_2}{L} = \frac{0 - 3}{3\sqrt{2}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

(pers. 2.55)

$$\text{Sin}\,\theta = \frac{Y_3 - Y_2}{L} = \frac{0-3}{3\sqrt{2}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\lambda^2 = [\,-\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,]$$

– Menyusun matriks kekakuan struktur.

Batang 1 : c = 1, s = 0, $\gamma_1 = \frac{AE}{L} = \frac{4.10^6}{3} = 1{,}333.10^6$

Dari pers 2.51 :

$$K^1 = 1{,}333.10^6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \leftarrow \text{MCODE(1)}$$

$$\text{MCODE } K^{(1)} = 1{,}333.10^6 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Batang 2 : c = $-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$, s = $-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$, $j_2 = \frac{AE}{L} = \frac{4.10^6}{} = 0{,}943.10^6$

Dari pers 2.51 :

$$K^2 = 0{,}943.10^6 \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} \\ -\tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ -\tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \leftarrow \text{MCODE(2)}$$

$$\text{MCODE } K^{(2)} = 0{,}943.10^6 \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$K = \sum_{i=1}^{2} K^{(i)} = K^{(1)} + K^{(2)}$$

$$= 1{,}333.10^6 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0{,}943.10^6 \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}804.10^6 & 0{,}471.10^6 \\ 0{,}471.10^6 & 0{,}471.10^6 \end{bmatrix}$$

– Menyusun matriks beban luar.
Karena merupakan konstruksi rangka maka $\hat{F} = 0$. Beban pada titik buhul :

titik 1 :

$$\bar{F}^1 = \begin{bmatrix} \bar{F}_1^1 \\ \bar{F}_2^1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{JCODE(1)} \\ \text{JCODE} \end{matrix} \Rightarrow \bar{F}\,(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

titik 2 :

$$F^2 = \begin{bmatrix} \bar{F}_2^2 \\ \bar{F}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{JCODE(2)} \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \quad \text{JCODE} \Rightarrow \bar{F}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2000 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

titik 3 :

$$\bar{F}^3 = \begin{bmatrix} \bar{F}_1^3 \\ \bar{F}_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{JCODE} \\ 0 \end{matrix} \quad \text{JCODE} \Rightarrow \bar{F}(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^{3} \bar{F}(i) = \bar{F}(1) + \bar{F}(2) + \bar{F}\,(3)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ -2000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2000 \end{bmatrix}$$

$$F = \bar{F} + \hat{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2000 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh persamaan simultan untuk sistem struktur (F = KD) :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}804.10^6 & 0{,}471.10^6 \\ 0{,}471.10^6 & 0{,}471.10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

4. "Solution" (penyelesaian pers diatas)

D_1 = 0,0015 cm

$D_2 = -0{,}0057$ cm

5. "Element Forces" (Gaya-gaya batang)

— Displesemen yang diperoleh pada butir 4 diatas disusun kembali pada matriks displesemen masing-masing batang dengan bantuan MCODE.

Batang 1 :

$$D^1 = \begin{bmatrix} D_1^1 \\ D_2^1 \\ D_3^1 \\ D_4^1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{MCODE(1)} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \xrightarrow{\text{MCODE}} D^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}0015 \\ -0{,}0057 \end{bmatrix}$$

Batang 2 :

$$D^2 = \begin{bmatrix} D_1^2 \\ D_2^2 \\ D_3^2 \\ D_4^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{MCODE(2)} \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \xrightarrow{\text{MCODE}} D^2 = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0015 \\ -0{,}0057 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Displesemen D^1 dan D^2 masih pada sistem koordinat global. Untuk menghitung gaya-gaya batang ($f = k\,d$), maka D^1 dan D^2 perlu ditransformasi dahulu ke dalam sistem koordinat lokal d^1 dan d^2.

— Menghitung displesemen pada sistem koordinat lokal.

Batang 1 : $d^1 = \Lambda^1 D^1$ (pers 2.39)

$$\begin{bmatrix} d_1^1 \\ d_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^1 & 0 \\ 0 & \lambda^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^1 \\ D_2^1 \\ D_3^1 \\ D_4^1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_1^1 \\ d_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}0015 \\ -0{,}0057 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}0015 \end{bmatrix}$$

Batang 2 : $d^2 : d^2 = \lambda^2 D^2$ (pers 2.39)

$$\begin{bmatrix} d_1^2 \\ d_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^2 \\ D_2^2 \\ D_3^2 \\ D_4^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}0015 \\ -0{,}0057 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}00297 \\ 0 \end{bmatrix}$$

— Gaya-gaya batang

Batang 1 : ($f^1 = k^1 d^1$) (Pers. 2.31)

$$\begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \end{bmatrix} = 1.333.10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}0015 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1999,5 \\ +1999,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_a^1 \\ f_b^1 \end{bmatrix}$$

Batang 2 : ($f^2 = k^2 d^2$)

$$\begin{bmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \end{bmatrix} = 0,943.10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,00297 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2800,57 \\ -2800,57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_a^2 \\ f_b^2 \end{bmatrix}$$

6. "Joint Forces" (Gaya-gaya titik buhul)

$$P_1 = F_a^1 = \lambda^{1T} f_a^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1999,5$$

$$= \begin{bmatrix} -1999,5 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -2000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = F_b^1 + F_a^2 = \lambda^{1T} f_b^1 + \lambda^{2T} f^2 a$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 1999,5 + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} 2800,57$$

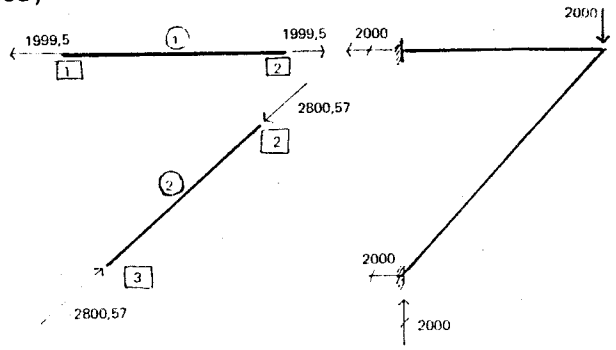
$$= \begin{bmatrix} 19,2 \\ -1980,3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -2000 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = F_b^3 = \lambda^{2T} f_b^2$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} (2800,57)$$

$$= \begin{bmatrix} 1980,3 \\ 1980,3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2000 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

7. "Free Body"

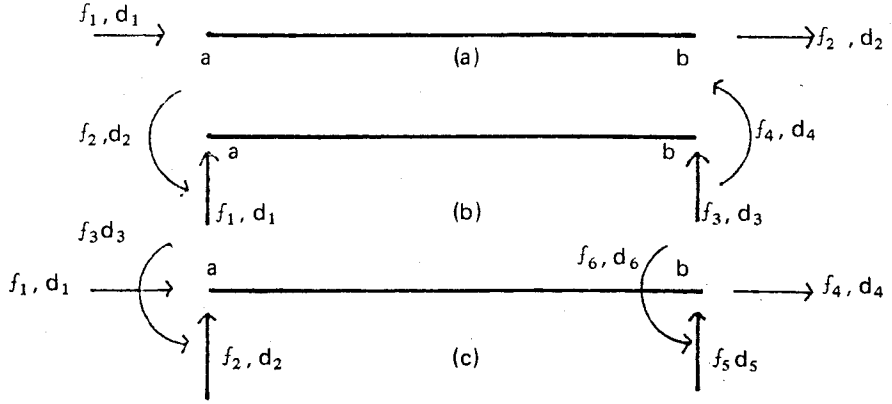


2.4 Portal Bidang ("Frame Structures")

Portal adalah suatu konstruksi rangka yang batang-batangnya dihubungkan secara kaku sempurna, sehingga sudut antara batang-batangnya sebelum dan sesudah pembebasan tetap adanya.

Karena adanya beban luar, baik itu beban pada batang ("element load") atau beban pada titik buhul ("joint load"), batang akan mengalami deformasi aksial dan lentur. Dengan demikian persamaan dasarnya merupakan gabungan antara persamaan dasarnya merupakan gabungan antara persamaan dasar batang yang berdeformasi aksial (pers 2.3) dan persamaan dasar batang lentur (pers 2.16).

Untuk lebih jelasnya kedua persamaan tersebut diatas akan ditulis kembali di bawah ini.



GAMBAR 2.20 Batang (a). deformasi aksial
(b). deformasi lentur
(c). kombinasi (a) dan (b)

2.4.1 Batang yang mengalami deformasi aksial

Lihat gambar 2.20 a

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}, \quad j = \frac{AE}{L} \tag{2.56}$$

2.4.2 Batang yang mengalami deformasi lentur

Lihat gambar 2.20 b

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}, \alpha = \frac{EI}{L^3} \tag{2.57}$$

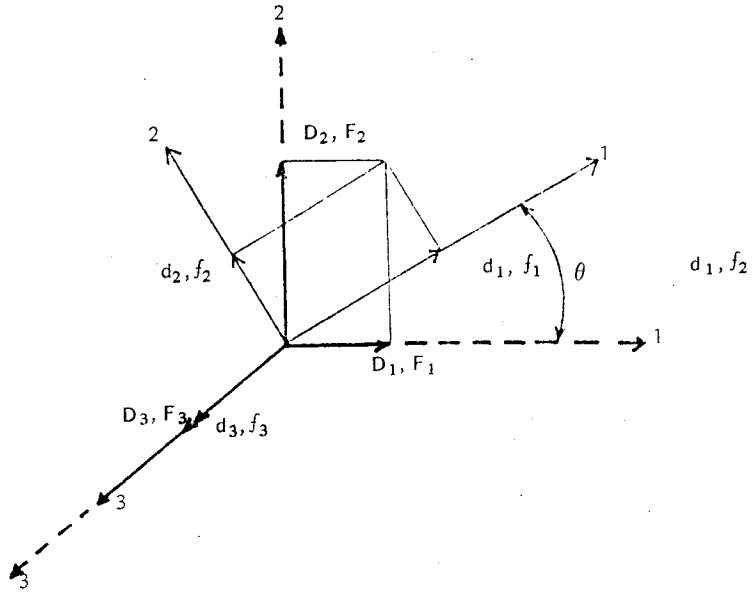
2.4.3 Batang yang mengalami deformasi aksial dan lentur (biasa disebut sebagai Portal)

Seperti nampak pada gambar 2.20 c maka dapat disusun suatu persamaan yang merupakan gabungan persamaan 2.56 dan 2.57, yaitu

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\beta & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \frac{EI}{L^3}, \quad \beta = \frac{AL^2}{I} \tag{2.58}$$

Persamaan 2.58 disebut persamaan dasar struktur portal bidang. Persamaan 2.58 tersebut diturunkan berdasarkan sumbu batang sejajar dengan sumbu X lokal. Dengan demikian agar dapat dilakukan penyusunan matriks kekakuan seluruh sistem struktur diperlukan matriks transformasi.

2.4.4 Matriks tranformasi



GAMBAR 2.21 Transformasi koordinat

$$\begin{aligned} d_1 &= D_1 \cos\theta + D_2 \sin\theta \\ d_2 &= -D_1 \sin\theta + D_2 \cos\theta \\ d_3 &= D_3 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Persamaan (2.59) dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \tag{2.60}$$

atau, $$\left[d_a\right] = [\lambda]\left[D_a\right] \qquad (2.61)$$

Jika $\cos\theta = c$ & $\operatorname{Sin}\theta = S$ maka

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} c & 5 & 0 \\ -S & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.62)$$

Analog dengan pers (2.60) akan dapat diperoleh

$$\begin{bmatrix} d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \end{bmatrix} \qquad (2.63)$$

atau : $$\left[d_a\right] = [\lambda]\left[D_b\right] \qquad (2.64)$$

Dengan menggabungkan persamaan 2.61 dan 2.64 akan diperoleh :

$$\begin{bmatrix} d_a \\ d_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_a \\ D_b \end{bmatrix} \qquad (2.65)$$

atau $d = [\Lambda]\ D \qquad (2.66)$

Analog dengan penjabaran per 2.39 s/d pers 2.50, maka akan diperoleh :

$$[K.] = \left[\begin{array}{c|c} K_{aa} & K_{ab} \\ \hline K_{ba} & K_{bb} \end{array}\right] \qquad (2.67)$$

dengan : $$\begin{aligned} K_{aa} &= \lambda^T k_{aa}\ \lambda \\ &\quad\ \lambda^T k_{ab}\ \lambda \\ &\quad\ \lambda^T k_{ba}\ \lambda \\ &\quad\ \lambda^T k_{bb}\ \lambda \end{aligned} \qquad (2.68)$$

Nilai-nilai k_{aa}, k_{ab}, k_{ba} dan k_{bb} adalah merupakan matriks kekakuan batang pada sistem koordinat lokal, seperti nampak pada persamaan dibawah ini.

$$[k] = \left[\begin{array}{c|c} k_{aa} & k_{ab} \\ \hline k_{ba} & k_{bb} \end{array}\right] = \alpha \left[\begin{array}{ccc|ccc} \beta & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ \hline -\beta & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{array}\right] \qquad (2.69)$$

Sehingga diperoleh :

$$K_{aa} = \alpha \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \alpha \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.70)$$

Dengan cara yang sama akan dapat dihitung nilai-nilai K_{ab}, K_{ba} dan K_{bb}. Sehingga akan dapat diperoleh matriks kekakuan batang/elemen pada sistem koordinat global, seperti nampak dibawah ini :

$$[K] = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_4 & -g_1 & -g_2 & g_4 \\ & g_3 & g_5 & -g_2 & -g_3 & g_5 \\ & & g_6 & -g_4 & -g_5 & g_7 \\ & & & g_1 & g_2 & -g_4 \\ \text{Simetri} & & & & g_3 & -g_5 \\ & & & & & g_6 \end{bmatrix} \qquad (2.71)$$

dengan : $g_1 = \alpha\ (\beta\ c^2 + 12\ s^2)$

$g_2 = \alpha\ cs\ (\beta - 12)$

$g_3 = \alpha\ (\beta\ s^2 + 12\ c^2)$

$g_4 = -\alpha\ 6\ L\ s$ (2.71 a)

$g_5 = \alpha\ 6\ L\ c$

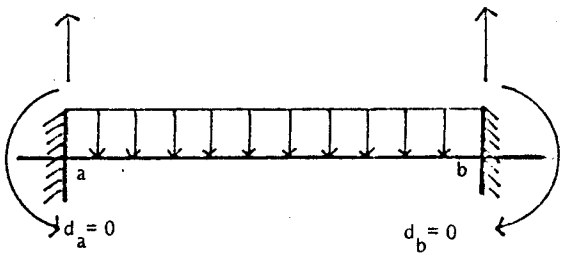
$g_6 = \alpha\ 4\ L^2$

$g_7 = \alpha\ 2\ L^2$

$$\alpha = \frac{EI}{L^3}, \beta = \frac{AL^2}{I}$$

2.4.5 "Element Actions"

"Element actions" adalah suatu kondisi luar yang menyebabkan batang tetap diam pada tempatnya jika tidak ada displesemen pada titik buhulnya.



GAMBAR 222 "Fixed End Forees"

"Element actions" dapat terdiri atas :

- pembebanan
- perubahan temperatur
- ketidaksempurnaan pembuatan, dan lain-lain.

Secara khusus respon dari suatu sistem struktur dapat ditransformasikan kedalam beban titik ekivalen dengan persamaan :

$$\overline{FS} = \hat{FS} + FS \quad (2.72)$$

$\overline{FS}$ = gaya-gaya dalam sesungguhnya, termasuk didalamnya gaya-gaya primer dan gaya-gaya titik buhul.

$\hat{FS}$ = gaya-gaya primer yang terdiri respons batang-batangnya dan gaya-gaya pada titik buhul yang dibutuhkan untuk menahan displesemen pada titik buhul.

FS = sistem gaya titik ekivalen tanpa gaya primer.

$$FS = \overline{FS} - \hat{FS} \quad (2.73)$$

FS hanya terdiri beban pada titik buhul sebab "element actions" $\hat{FS}$ dan dengan persamaan 2.73, dikurangkan terhadap $\overline{FS}$ menghasilkan FS. Sehingga FS dapat dihitung dengan metode matriks displesemen. Sedang $\hat{FS}$ dengan jelas dapat dihitung secara sendiri-sendiri tiap batang karena tiap-tiap titik buhulnya ditahan sehingga tidak ada interaksi dengan batang lainnya.

Dalam bentuk matriks beban titik buhul eqivalen dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$F = \overline{F} - \hat{F} \quad (2.74)$$

dengan : $\overline{F}$ = Vektor beban pada titik buhul

$\hat{F}$ = Vektor beban pada titik buhul tetap ("fixed and forces")

F = Vektor beban eqivalen

$\overline{F}$ sudah dijelaskan terdahulu dan $\hat{F}$ dapat dihitung sebagai berikut :

1. Untuk tiap-tiap batang/elemen yang menderita beban pada batang, dihitung vector "fixed and forces" (f^i) pada koordinat lokal dan kemudian ditransformasikan ke vektor "fixed and forces" pada koordinat global ($\hat{F}^i$).
2. Dengan bantuan MCODE, $\hat{F}^i$ di transformasikan sesuai dengan nomor derajat kebebasan yang ditunjukkan oleh MCODE sehingga diperoleh $\hat{F}^{(i)}$.

$$\hat{F}^i \xrightarrow{\text{MCODE}} \hat{F}^{(i)} \quad (2.75)$$

(untuk lebih jelasnya lihat pada contoh soal)

3. Untuk seluruh sistem struktur dengan n derajat kebebasan yang terdiri dari NE ("Number of Elements"), diperoleh kondisi keseimbangan.

$$\hat{F} = \sum_{i=1}^{NE} \hat{F}^{(i)} \quad (2.76)$$

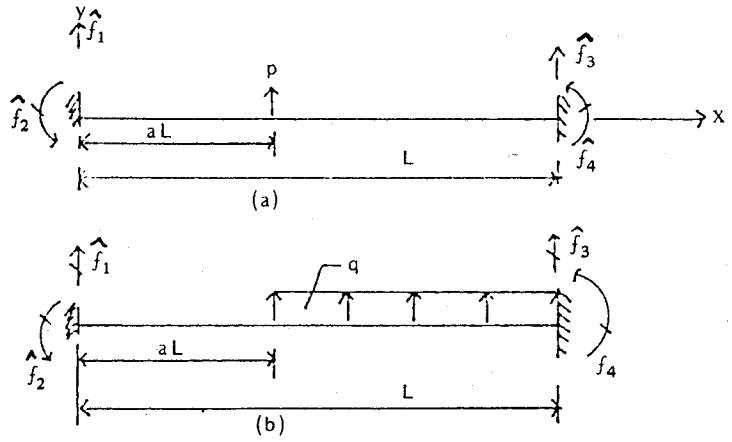
Vektor gaya dalam tiap-tiap batang dapat dihitung dengan rumus dibawah ini, analog dengan pers. 2.72 :

$$\bar{f}^i = f^i + \hat{f}^i \qquad (2.77)$$

dengan : $f^i = k^i d^i$

2.4.6 "Fixed and Forces"

Dibawah ini akan disajikan rumus "fixed and forces" yang paling banyak digunakan pada sistem pembebanan di Indonesia.



GAMBAR 2.23 "Fixed and Forces"
(a). Beban terpusat
(b). Beban terbagi rata

Beban terpusat :

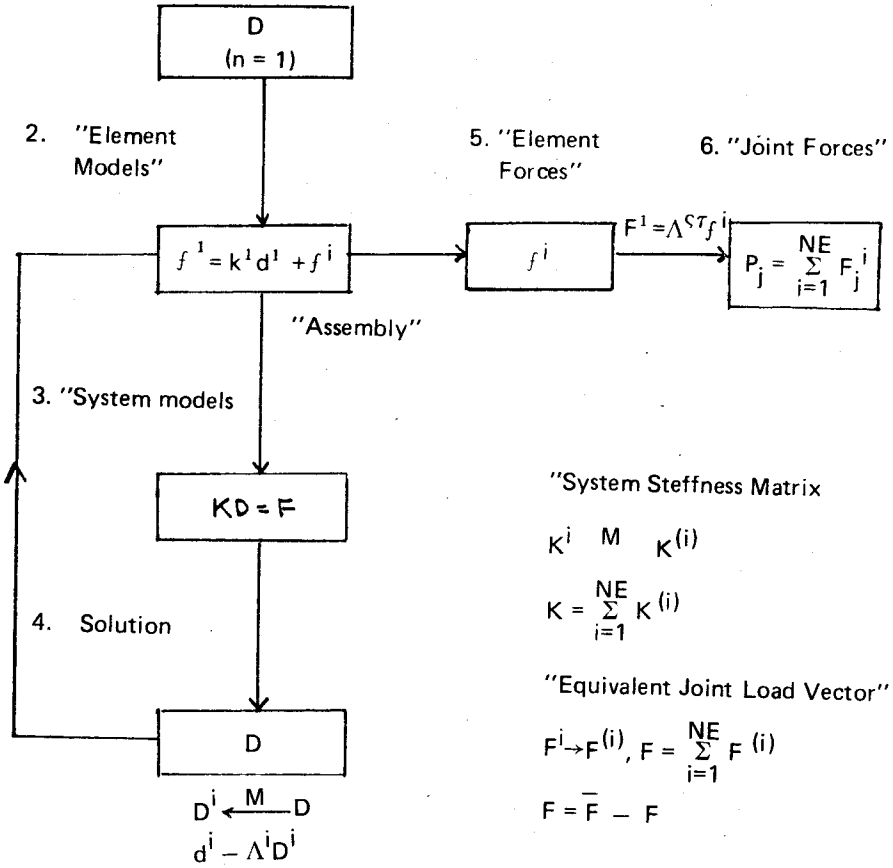
$$f = P \begin{bmatrix} -1 - a^2\,(2a - 3) \\ -La\,(1-a)^2 \\ a^2\,(2a-3) \\ La^2\,(1-a) \end{bmatrix} \qquad (2.78)$$

Beban terbagi rata :

$$f = qL \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{2}\,(1 - a^4 + 2a^3 - 2a) \\ -\frac{L}{12}\,(1 - 3a^4 + 8a^3 - 6a^2) \\ -\tfrac{1}{2}\,(1 + a^4 - 2a^3) \\ \frac{L}{12}\,(1 + 3a^4 - 4a^3) \end{bmatrix} \qquad (2.79)$$

2.4.7. Prosedur hitungan

1. "Un knowns"



GAMBAR 2.24 Metode "matrix displecemen" dengan beban pada batang (n = d o f, NE = jumlah batang).

Penjelasan diagram alir pada gambar 2.24 diatas :

1. *"Unknowns"*

   Menentukan berapa jumlah displesemen yang mungkin terjadi pada sistem tersebut yaitu sesuai dengan berapa nilai derajat kebebasan sistem struktur tersebut (= n). Cara menghitung n adalah dengan melihat satu persatu kemungkinan displesemen masing-masing titik buhul.

2. *"Element Models"*

   Menentukan bentuk persamaan dasar : $\bar{f}^i = k^i d^i + \hat{f}^i$

   $\bar{f}^i$ = gaya dalam

   k^i = matriks kekakuan batang pada koordinat lokal

   d^i = displesemen ujung tiap-tiap batang pada koordinat lokal

   $\hat{f}^i$ = gaya-gaya primer ("fixed and forces")

   Sehingga dalam hal ini gaya-gaya dalam final adalah merupakan penjumlahan gaya dalam karena displesemen titik buhul dan gaya-gaya primer.

3. *"System Model"*

   Menyusun persamaan simultan KD = F, matriks kekakuan sistem struktur (K) dan matriks beban luar (F) disusun. Sehingga dari pers KD = F diperoleh matrik displesemen seluruh sistem struktur (D) pada sistem koordinat global.

   Menyusun matriks [K] :

   - $K^i \xrightarrow{M} K^{(i)}$, matriks kekakuan elemen pada koordinat global K^i (persamaan 2.71) dengan bantuan "MCODE"(M), indeks ("subscribs") unsur-unsurnya disesuaikan dengan nomor d o f pada masing-masing "MCODE"nya. Sehingga diperoleh matriks $K^{(i)}$ dengan indeks sudah sesuai dengan nomor d o f. Dengan kata lain $K^{(i)}$ merupakan sumbangan kekakuan batang ke i terhadap kekakuan sistem struktur.
   - $K = \sum_{i=1}^{NE} K^{(i)}$, matriks kekakuan sistem struktur (K) merupakan penjumlahan matriks kekakuan batang-batangnya ($K^{(i)}$.

   Menyusun matriks :

   $$[F] : [F] = [F] - [F]$$

Matriks beban luar $[F]$ adalah merupakan pengurangan dari matriks beban titik $[\bar{F}]$ dan matriks gaya-gaya dalam primer $[\hat{F}]$ ("fixed and forces").

- $\bar{F}^i \xrightarrow{JCODE} \bar{F}^{(i)}$, matriks beban luar pada masing-masing titik buhul $\bar{F}^i$ disusun kembali dengan indeks sesuai d o f pada JCODE, sehingga diperoleh $\bar{F}^{(i)}$.
- $\bar{F} = \sum_{i=1}^{NJ} \bar{F}^{(i)}$, matriks beban luar titik buhul merupakan penjumlahan dari beban luar masing-masing titik buhul (NJ = "Number of Joint"/jumlah titik buhul).
- $\hat{F} \xrightarrow{M} \hat{F}^{(i)}$, gaya ujung batang/gaya-gaya primer (sering juga dikatakan *momen primer*) atau "fixed and forces" $[\hat{F}^i]$, letak unsur-unsurnya disusun kembali sesuai dengan nomor d o f pada MCODE masing-masing batangnya. Sehingga diperoleh matriks "fixed and forces" $[\hat{F}^{(i)}]$ dengan indeks unsur-unsurnya sesuai dengan nomor d o f.
- $\hat{F} = \sum_{i=1}^{NE} \hat{F}^{(i)}$, "fixed and forces" total adalah merupakan penjumlahan "fixed and forces" masing-masing batangnya.

4. *"Solution"*

   Dari langkah butir 3 diatas diperoleh persamaan simultan KD = F. Solusi dari persamaan tersebut akan diperoleh matriks displesemen seluruh titik buhul sistem struktur tersebut ($[D]$).

5. *"Elemen Forces" (gaya dalam batang)*

   Agar supaya dapat dihitung gaya dalam masing-masing batang ($\bar{f}^i = k^i d^i + f^i$), maka perlu dihitung terlebih dahulu matriks displesemen masing-masing batang (d^i) pada sistem koordinat lokal. Adapun langkah untuk menghitung d^i adalah :

   - $D \xrightarrow{M} D^i$, matriks displesemen masing-masing batang pada koordinat global (D^i), unsur-unsurnya diambilkan dari matriks D dengan bantuan nomor indeks sesuai pada MCODE masing-masing batang.
   - $d^i = \Lambda^i D^i$, matrik displesemen batang pada sistem koordinat global D^i dikalikan dengan matriks transformasi D^i, sehingga diperoleh matriks displesemen masing-masing batang pada sistem koordinat lokal d^i.

Setelah diperoleh matriks d^i, maka dengan persamaan 2.77 dapat dihitung gaya dalam masing-masing batang f^i.

6. *"Joint Forces" (gaya pada titik buhul)*

Gaya-gaya titik buhul pada umumnya dinyatakan pada sistem koordinat global. Gaya-gaya titik buhul dihitung dengan cara mentransformasikan kembali gaya dalam masing-masing batang ($P_j = \sum_{i=1}^{NE} \Lambda^{iT} f^i$)

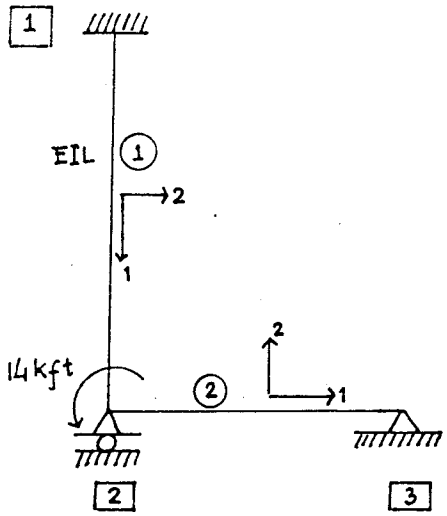
Contoh Soal 1 : Tanpa beban pada batang

$E = 30.000$ k si , $A = 5$ in^2

$I = 50$ in^4

$L = 10\, f$t

14 k ft $= 14{,}12 = 168$ k in



1. "Unknowns" (terdapat 3 d o f)

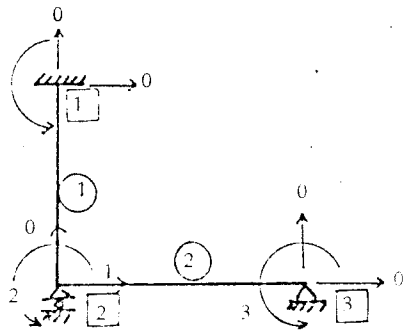
D_k, $k = 1, 2, 3$

2. "Element Models" (terdiri 2 batang)

$f^i = k^i d^i$, $i = 1, 2$

3. "System Model"

– Menentukan JCODE(J) dan MCODE(M)



"0 (nol) .. berarti dikekang ("Constrained")

JCODE : Titik buhul 1 : JCODE(1) = [0 0 0]

Titik buhul 2 : JCODE(2) = [0 0 2]

Titik buhul 3 : JCODE(3) = [0 0 3]

MCODE : Batang 1 : MCODE(1) = [0 0 0 1 0 2]

Batang 2 : MCODE(2) = [1 0 2 0 0 3]

– Menghitung matriks transformasi tiap-tiap batang (untuk ini dipakai pers. 2.55)

Batang 1 : $\cos\theta = \dfrac{X_2 - X_1}{L} = \dfrac{0 - 0}{L} = 0$

$\sin\theta = \dfrac{Y_2 - Y_1}{L} = \dfrac{0 - L}{L} = -1$

$$\lambda^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Batang 2 : $\cos\theta = \dfrac{X_3 - X_2}{L} = \dfrac{L - 0}{L} = 1$

$\sin\theta = \dfrac{Y_3 - Y_2}{L} = \dfrac{0 - 0}{L} = 0$

$$\lambda^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– Menyusun matriks kekakuan sistem struktur [K]

Batang 1 : $\alpha = \dfrac{EI}{L^3} = \dfrac{30000 \cdot 50}{120^3} = 0{,}87$

$\beta = \dfrac{AL^2}{I} = \dfrac{5\,(120)^2}{50} = 1440$

$c = \cos\theta = 0 \;;\; s = \sin\theta = -1.$

$K^1 =$

0	0	0	1	0	2	← MCODE(1)
g_1	g_2	g_4	$-g_1$	$-g_2$	g_4	0
	g_3	g_5	$-g_2$	$-g_3$	g_5	0
		g_6	$-g_4$	$-g_5$	g_7	0
			(g_1)	g_2	$(-g_4)$	1
				g_3	$-g_5$	0
					(g_6)	2
Simetri						

$\Rightarrow M\,K^{(1)} =$

1	2	3	
g_1	g_4	0	1
$-g_4$	g_6	0	2
0	0	0	3

Sesuai jumlah d o f

Dengan pers 2.71 a akan dapat dihitung :

$g_1 = \alpha\,(\beta c^2 + 12 s^2) = 0{,}87\,(0 + 12(-1)^2) = 10{,}44$

$g_2 = -\alpha\,6\,L\,s = -0{,}87 \cdot 6 \cdot 120 \cdot (-1) = 626{,}4$

$g_6 = \alpha \cdot 4 \cdot L^2 = 0{,}87 \cdot 4 \cdot (120)^2 = 50112$

Sehingga :

$$K^{(1)} = \begin{bmatrix} 10{,}44 & -626{,}4 & 0 \\ -626{,}4 & 50112 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Batang 2 : $\alpha = \dfrac{EI}{L^3} = 0{,}87\;,\;\beta = 1440$

$c = \cos\theta = 1\;,\quad s = \sin\theta = 0$

$K^2 =$

1	0	2	0	0	3	
(g_1)	g_2	(g_4)	$-g_1$	$-g_1$	(g_4)	1
	g_3	g_5	$-g_2$	$-g_3$	g_5	0
		(g_6)	$-g_4$	$-g_5$	(g_7)	2
			g_1	g_2	$-g_4$	0
				g_3	g_5	0
					(g_6)	3
Simetris						

$\Rightarrow M\,K^{(2)} =$

1	2	3	
g_1	g_4	g_4	1
g_4	g_6	g_7	2
g_4	g_7	g_6	3

Dengan pers 2.71 a akan dapat dihitung :

$g_1 = \alpha\,(\beta c^2 + 12 s^2) = 0{,}87\,(1440 \cdot 1^2 + 0) = 1252{,}8$

$g_4 = -\alpha \cdot 6 \cdot L \cdot s = 0$

$g_6 = \alpha \cdot 4 \cdot L^2 = 0{,}87 \cdot 4 \cdot (120)^2 = 50112$

$g_7 = \alpha \cdot 2 \cdot L^2 = 0{,}87 \cdot 2 \cdot (120)^2 = 25056$

Sehingga :

$$K^{(2)} = \begin{bmatrix} 1252{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 50112 & 25056 \\ 0 & 25056 & 50112 \end{bmatrix}$$

$$K = \sum_{i=1}^{NE} K^{(i)} = K^{(1)} + K^{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} 10{,}44 & -626{,}4 & 0 \\ -626{,}4 & 50112 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1252{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 50112 & 25056 \\ 0 & 25056 & 50112 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1263{,}24 & -626{,}4 & 0 \\ -626{,}4 & 100224 & 25056 \\ 0 & 25056 & 50112 \end{bmatrix}$$

– Menyusun matriks beban luar.

Beban pada titik buhul ("Joint") :

Titik 1 :

$$F^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \Longrightarrow J \quad \bar{F}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

JCODE(1) — Sesuai dengan d o f

Titik 2 :

$$\bar{F}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 168 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \Longrightarrow J \quad \bar{F}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 168 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Titik 3 :

$$\bar{F}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} \Longrightarrow J \quad \bar{F}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^{NJ} = \bar{F}^{(1)} + \bar{F}^{(2)} + \bar{F}^{(3)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 168 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 168 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Beban pada batang: tidak ada, maka F = 0 Sesuai persamaan 2.74, maka :

$$F = \bar{F} - F = \bar{F} - 0 = \bar{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 168 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh persamaan simultan, sesuai persamaan 2.22, yaitu:

$$F = K\,D.$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 168 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1263{,}24 & -626{,}4 & 0 \\ -626{,}4 & 100224 & 25056 \\ 0 & 25056 & 50112 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$$

4. "Solution"

Penyelesaian dari persamaan simultan diatas adalah :

$$D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}00095 \\ 0{,}00192 \\ -0{,}00096 \end{bmatrix}$$

5. "Element Forces"

– $D \xrightarrow{M} D^i$

$$D^1 = \begin{bmatrix} D_1^1 \\ D_2^1 \\ D_3^1 \\ D_4^1 \\ D_5^1 \\ D_6^1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \Longrightarrow M \quad D^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_1 \\ 0 \\ D_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}00095 \\ 0 \\ 0{,}00192 \end{bmatrix}$$

MCODE(1)

Penjelasan : pada batang 1 diatas, sesuai dengan MCODE nya maka terdapat 2 displesemen yaitu D_4^1 dan D_6^1 . Dengan nilai masing-masing :

$D_4^1 = D_1$ (indeks 1 disini sesuai dengan MCODE pada posisi tersebut)

$D_6^1 = D_2$ (idem)

$$D^2 = \begin{bmatrix} D_1^2 \\ D_2^2 \\ D_3^2 \\ D_4^2 \\ D_5^2 \\ D_6^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} \xrightarrow{M} D^2 = \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ D_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0{,}00095 \\ 0 \\ 0{,}00192 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}00096 \end{bmatrix}$$

– Menghitung deformasi tiap-tiap elemen/batang pada sistem koordinat lokal ($d^i = \Lambda^i D^i$)

Batang 1 : $$\begin{bmatrix} d_a^1 \\ d_b^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^1 & 0 \\ 0 & \lambda^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_a^1 \\ D_b{}^1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_1^1 \\ d_2^1 \\ d_3^1 \\ d_4^1 \\ d_5^1 \\ d_6^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^1 \\ D_2^1 \\ D_3^1 \\ D_4^1 \\ D_5^1 \\ D_6^1 \end{bmatrix}$$

$c = 0 ; s = -1$

$$\begin{bmatrix} d_1^1 \\ d_2^1 \\ d_3^1 \\ d_4^1 \\ d_5^1 \\ d_6^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}00095 \\ 0 \\ 0{,}00192 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_1^1 \\ d_2^1 \\ d_3^1 \\ d_4^1 \\ d_5^1 \\ d_6^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}00095 \\ 0{,}00192 \end{bmatrix}$$

Batang 2 : $$\begin{bmatrix} d_a^2 \\ d_b^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} D_a^2 \\ D_b^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_1^2 \\ d_2^2 \\ d_3^2 \\ d_4^2 \\ d_5^2 \\ d_6^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^2 \\ D_2^2 \\ D_3^2 \\ D_4^2 \\ D_5^2 \\ D_6^2 \end{bmatrix}$$

$c = 1 , s = 0$

$$\begin{bmatrix} d_1^2 \\ d_2^2 \\ d_3^2 \\ d_4^2 \\ d_5^2 \\ d_6^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}00095 \\ 0 \\ 0{,}00192 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}00096 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_1^2 \\ d_2^2 \\ d_3^2 \\ d_4^2 \\ d_5^2 \\ d_6^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}00095 \\ 0 \\ 0{,}00192 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}00096 \end{bmatrix}$$

– Menghitung gaya dalam batang ($f^i = k^i d^i$)

Batang 1 : $f^1 = k^1 d^1$.

$$k^1 = \alpha \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\beta & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$\alpha = 0{,}87 \; ; \; \beta = 1440$

$$k^1 = \begin{bmatrix} 1252{,}8 & 0 & 0 & -1252{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 10{,}44 & 626{,}4 & 0 & -10{,}44 & 626{,}4 \\ 0 & 626{,}4 & 50112 & 0 & -626{,}4 & 25056 \\ -1252{,}8 & 0 & 0 & 1252{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & -10{,}44 & -626{,}4 & 0 & 10{,}44 & -626{,}4 \\ 0 & 626{,}4 & 25056 & 0 & -626{,}4 & 50112 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 \\ f_4^1 \\ f_5^1 \\ f_6^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1252{,}8 & 0 & 0 & -1252{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 10{,}44 & 626{,}4 & 0 & -10{,}44 & 626{,}4 \\ 0 & 626{,}4 & 50112 & 0 & -626{,}4 & 25056 \\ -1252{,}8 & 0 & 0 & 1252{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & -10{,}44 & -626{,}4 & 0 & 10{,}44 & -626{,}4 \\ 0 & 626{,}4 & 25056 & 0 & -626{,}4 & 50112 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0{,}00095 \\ 0{,}00192 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}193 \; k \\ 47{,}512 \; k\,m \\ 0 \\ -1{,}193 \; k \\ 95{,}620 \; k\,in \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}193 \; k \\ 3{,}959 \; k\,ft \\ 0 \\ 1{,}193 \; k \\ 7{,}968 \; k\,ft \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_a^1 \\ \hline f_b^1 \end{bmatrix}$$

Batang 2 : $f^2 = k^2 d^2$

$$\begin{matrix} f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 = \\ f_4^2 \\ f_5^2 \\ f_6^2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1252{,}8 & 0 & 0 & -1252{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 10{,}44 & 626{,}4 & 0 & -10{,}44 & 626{,}4 \\ 0 & 626{,}4 & 50112 & 0 & -626{,}4 & 25056 \\ -1252{,}8 & 0 & 0 & 1252{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & -10{,}44 & -626{,}4 & 0 & 10{,}44 & -626{,}4 \\ 0 & 626{,}4 & 25056 & 0 & -626{,}4 & 50112 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}00095 \\ 0 \\ 0{,}00192 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}00096 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}19 & k \\ 0{,}60 & k \\ 72{,}16 & k\,in \\ 1{,}19 & k \\ -\,0{,}60 & k \\ 0 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}19 & k \\ 0{,}60 & k \\ 6{,}01 & k\,ft \\ \hline -\,1{,}19 & k \\ 0{,}60 & k \\ 0 & k\,ft \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_a^{\,2} \\ \hline f_b^{\,2} \end{bmatrix}$$

6. "Joint Forces" (gaya pada titik buhul)

Dengan persamaan 2.45 akan dapat diperoleh :

$$P_1 = F_a^{\,1} = \lambda^{1\,T} f_a^{\,1}$$

$$P_2 = F_b^{\,1} + F_a^{\,2} = \lambda^{1\,T} f_b^{\,1} + \lambda^{2\,T} f_a^{\,2}$$

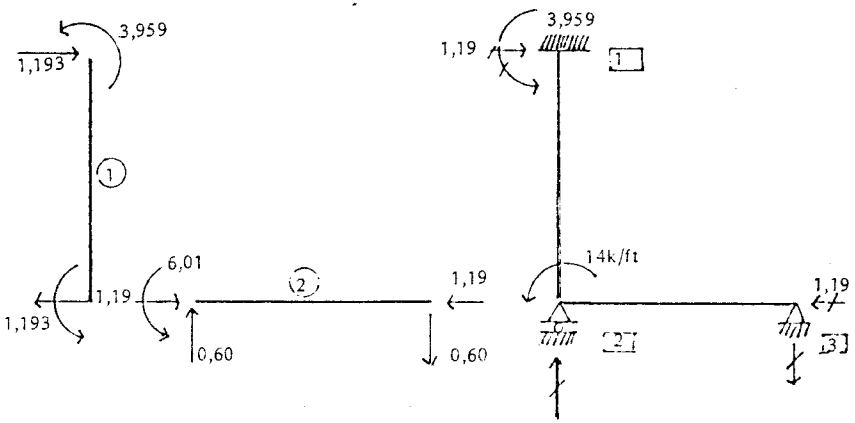
$$P_3 = F_b^{\,2} = \lambda^{2\,T} f_b^{\,2}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}193 \\ 3{,}959 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}193 \\ 0 \\ 3{,}959 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1{,}193 \\ 7{,}968 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}19 \\ 0{,}60 \\ 6{,}01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}003 \\ 0{,}60 \\ 13{,}978 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}60 \\ 14{,}0 \end{bmatrix}$$

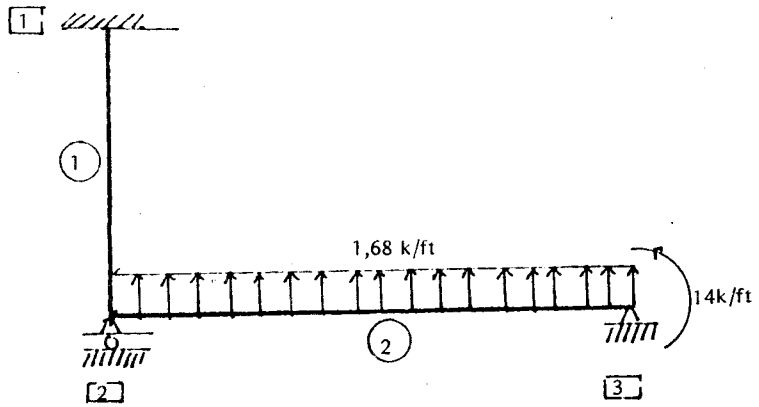
$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\,1{,}19 \\ -\,0{,}60 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\,1{,}19 \\ -\,0{,}60 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7. "Free Body"



Contoh soal 2 : Ada beban pada batang.

Bentuk dan ukuran strukturnya sama dengan contoh soal 1.



Penyelesaian:

Contoh soal 2 diatas adalah sama dengan contoh soal 1, sedang perbedaannya ada pada pembebanannya. Pada soal 2 diatas disamping beban pada titik buhul 3, terdapat pula beban terbagi rata pada batang 2. Pada penyelesaian disini hal-hal yang sama dengan soal 1 tidak dibahas lagi. Sedang yang akan dibahas adalah menyusun matriks beban luar, menghitung gaya dalam dan gaya pada titik buhul.

– Menyusun matriks beban luar.

Beban pada titik buhul :

Titik buhul 1 :

$$\bar{F}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \; J \Longrightarrow \bar{F}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Titik buhul 2 :

$$\bar{F}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \; J \Longrightarrow \bar{F}(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Titik buhul 3 :

$$\bar{F}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 168 \text{ k in} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} \; J \Longrightarrow \bar{F}(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 168 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^{NJ} \bar{F}(i) = \bar{F}(1) + \bar{F}(2) + \bar{F}(3)$$

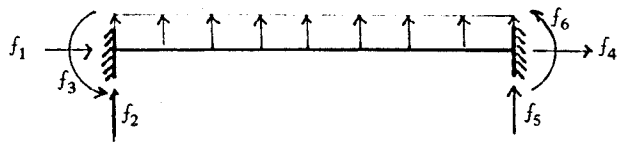
$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 168 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 168 \end{bmatrix}$$

Beban pada batang ("Element Load")

Batang 1 : tidak terdapat beban, sehingga :

$$f^1 = 0 \quad \text{maka} \quad \bar{F}(1) = 0$$

Batang 2 : Dengan pers 2.79 akan diperoleh



$$\hat{f}^2 = \begin{bmatrix} f_1^2 \\ f_2^2 \\ f_3^2 \\ f_4^2 \\ f_5^2 \\ f_6^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0 \\ -\ 8{,}4 \\ -168{,}0 \\ 0{,}0 \\ -\ 8{,}4 \\ 168{,}0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{F}^2 = \Lambda^{2\,T} \hat{f}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}0 \\ -\ 8{,}4 \\ -168{,}0 \\ 0{,}0 \\ -\ 8{,}4 \\ 168{,}0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0 \\ -\ 8{,}4 \\ -168{,}0 \\ 0{,}0 \\ -\ 8{,}4 \\ 168{,}0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{F}^2 \xrightarrow{M} \hat{F}(2)$$

$$\hat{F}^2 = \begin{bmatrix} 0,0 \\ -8,4 \\ -168,0 \\ 0,0 \\ -8,4 \\ 168,0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{matrix} \xrightarrow{M} \hat{F}(2) = \begin{bmatrix} 0,0 \\ -168,0 \\ 168,0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\hat{F} = \sum_{i=1}^{NE} F(i) = \hat{F}(1) + \hat{F}(2)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0 \\ -168,0 \\ 168,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0 \\ -168,0 \\ 168,0 \end{bmatrix}$$

$$F = \bar{F} - \hat{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 168,0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,0 \\ -168,0 \\ 168,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 168,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}$$

Matriks beban luar (F) sama dengan matriks beban luar pada contoh soal 1, sehingga gaya dalam akibat displesemen (d^i) akan sama pula. Dengan demikian akan dapat diperoleh gaya dalam total, yaitu pengaruh displesemen pada titik buhul dan "fixed and forces", sesuai dengan pers. 2.77.

$$\bar{f}^1 = f^1 + \hat{f}^1 = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 1,193 \\ 3,959 \\ 0,0 \\ 1,193 \\ 7,968 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 1,193 \\ 3,959 \\ 0,0 \\ 1,193 \\ 7,969 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_a^1 \\ \bar{f}_b^1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{f}^2 = f^2 + \hat{f}^2 = \begin{bmatrix} 1,19 \\ 0,60 \\ 6,01 \\ -1,19 \\ -0,60 \\ 0,0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0 \\ -8,4 \\ -14,0 \\ 0,0 \\ -8,4 \\ 14,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,19 & k \\ -7,8 & k \\ -7,99 & k\,f\,t \\ -1,19 & k \\ -9,0 & k \\ 14,0 & k\,f\,t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}_a^2 \\ \bar{f}_b^2 \end{bmatrix}$$

"Joint Forces"

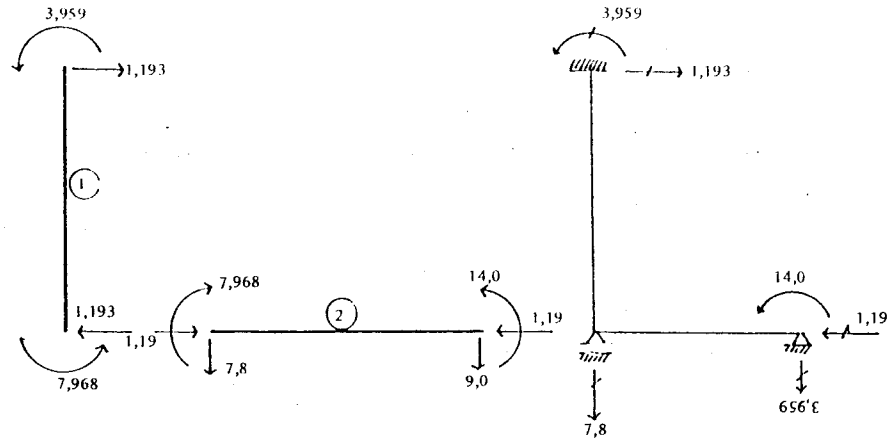
$$P_1 = F_a^1 = \lambda^{1T} \bar{f}_a^1$$
$$P_2 = F_b^1 + F_a^2 = \lambda^{1T} \bar{f}_b^1 \quad \lambda^2 \bar{f}_a^2$$
$$P_3 = F_b^2 = \lambda^{2T} \bar{f}_b^2$$

$$P_1 = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} 0,0 \\ 1,193 \\ 3,959 \end{matrix} = \begin{matrix} 1,193 \\ 0,0 \\ 3,959 \end{matrix}$$

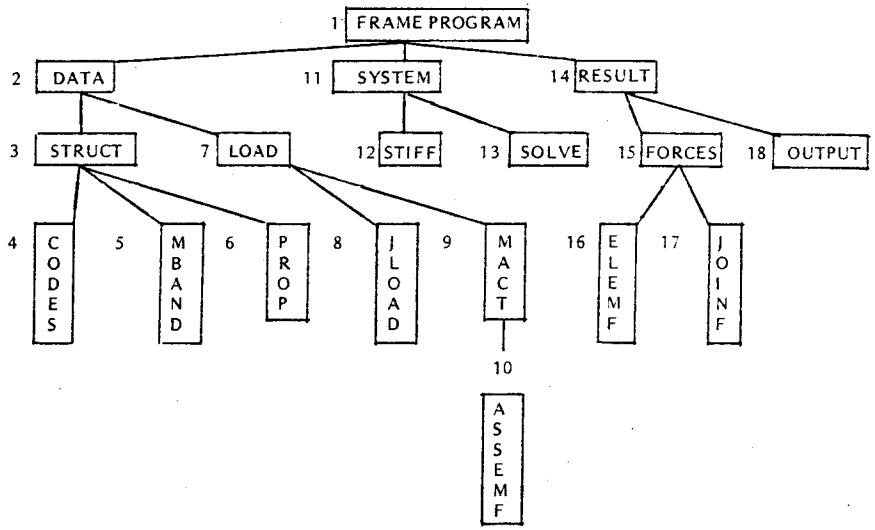
$$P_2 = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} 0,0 \\ -1,193 \\ 7,968 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} 1,19 \\ -7,8 \\ -7,99 \end{matrix} = \begin{matrix} 0,0 \\ -7,8 \\ 0,0 \end{matrix}$$

$$P_3 = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} -1,19 \\ -9,0 \\ 14,0 \end{matrix} = \begin{matrix} -1,19 \\ -9,0 \\ 14,0 \end{matrix}$$

"Free Body"



BAB III
PROGRAM KOMPUTER



GAMBAR 3.1. STRUKTUR PROGRAM

Di bawah ini disajikan listing program komputer secara lengkap dalam bahasa FORTRAN. Program tersebut dapat digunakan untuk menghitung Portal Bidang ataupun Rangka Bidang tanpa merubah program.

```
$DEBUG                                                                  1
*************************************************************************  2
*                                                                       *  3
*                                                                       *  4
*                        PROGRAM PORTAL BIDANG                          *  5
*                                                                       *  6
*                                                                       *  7
*                                                                       *  8
* DISUSUN OLEH : SUSASTRAWAN. MSc                                       *  9
*************************************************************************  10
C                                                                          11
C PROGRAM UTAMA PORTAL BIDANG                                              12
C                                                                          13
      COMMON F(6,150),P(3,125),SS(350,25),Q(350),AREA(150),ZI(150)         14
      COMMON EMOD(150),ELENG(150),C1(150),C2(150),MCODE(6,150),X(2,125)     15
      COMMON JCODE(3,125),MINC(2,150),NA(150),D(6),DK(6),G(7)              16
      COMMON DJ(3,125),NE,NJ,NLC,LC                                        17
      COMMON MBD,NEQ                                                       18
C                                                                          19
      OPEN(2,FILE='DATA.TXT')                                              20
      OPEN(3,FILE='HASIL.TXT',STATUS='NEW')                                21
C                                                                          22
      READ(2,*)NE,NJ,NLC                                                   23
C                                                                          24
      IF(NE.LE.150.AND.NJ.LE.125)THEN                                      25
         DO 10 LC=1,NLC                                                    26
            CALL DATA                                                      27
            CALL SYSTEM                                                    28
            CALL RESULT                                                    29
   10    CONTINUE                                                          30
C                                                                          31
      END IF                                                               32
   70 STOP                                                                 33
      END                                                                  34
C                                                                          35
C SUB PROGRAM DATA                                                         36
C                                                                          37
      SUBROUTINE DATA                                                      38
C                                                                          39
      COMMON F(6,150),P(3,125),SS(350,25),Q(350),AREA(150),ZI(150)         40
      COMMON EMOD(150),ELENG(150),C1(150),C2(150),MCODE(6,150),X(2,125)     41
      COMMON JCODE(3,125),MINC(2,150),NA(150),D(6),DK(6),G(7)              42
```



```
      COMMON DJ(3,125),NE,NJ,NLC,LC                                        43
      COMMON MBD,NEQ                                                       44
C                                                                          45
      IF(LC.EQ.1)THEN                                                      46
         CALL STRUCT                                                       47
      END IF                                                               48
         CALL LOAD                                                         49
      RETURN                                                               50
      END                                                                  51
C                                                                          52
C SUB PROGRAM STRUCT                                                       53
C                                                                          54
      SUBROUTINE STRUCT                                                    55
      COMMON F(6,150),P(3,125),SS(350,25),Q(350),AREA(150),ZI(150)         56
      COMMON EMOD(150),ELENG(150),C1(150),C2(150),MCODE(6,150),X(2,125)     57
      COMMON JCODE(3,125),MINC(2,150),NA(150),D(6),DK(6),G(7)              58
      COMMON DJ(3,125),NE,NJ,NLC,LC                                        59
      COMMON MBD,NEQ                                                       60
C                                                                          61
      DO 10 M=1,NE                                                         62
C************************************************************            63
         READ(2,*)I,MINC(1,I),MINC(2,I),AREA(I),ZI(I),EMOD(I)              64
C************************************************************            65
   10 CONTINUE                                                             66
C                                                                          67
      DO 30 J=1,NJ                                                         68
         DO 20 L=1,3                                                       69
            JCODE(L,J)=1                                                   70
   20    CONTINUE                                                          71
   30 CONTINUE                                                             72
C***********************                                                   73
   35 READ(2,*)JNUM,JDIR                                                   74
C***********************                                                   75
         IF(JNUM.NE.0)THEN                                                 76
            JCODE(JDIR,JNUM)=0                                             77
            GO TO 35                                                       78
         ELSE                                                              79
            CALL CODES                                                     80
            CALL PROP                                                      81
         END IF                                                            82
      RETURN                                                               83
      END                                                                  84
```

Proyek Pembinaan Perpustakaan

```
C                                                                       85
C SUB PROGRAM CODES                                                     86
C                                                                       87
      SUBROUTINE CODES                                                  88
      COMMON F(6,150),P(3,125),SS(350,25),Q(350),AREA(150),ZI(150)      89
      COMMON EMOD(150),ELENG(150),C1(150),C2(150),MCODE(6,150),X(2,125)  90
      COMMON JCODE(3,125),MINC(2,150),NA(150),D(6),DK(6),G(7)            91
      COMMON DJ(3,125),NE,NJ,NLC,LC                                     92
      COMMON MBD,NEQ                                                    93
C                                                                       94
      NEQ = 0                                                           95
      DO 20 J=1,NJ                                                      96
         DO 10 L=1,3                                                    97
            IF(JCODE(L,J).NE.0)THEN                                     98
               NEQ = NEQ+1                                              99
              JCODE(L,J) = NEQ                                         100
            END IF                                                     101
   10    CONTINUE                                                      102
   20 CONTINUE                                                        103
C                                                                     104
      DO 40 I=1,NE                                                    105
         J = MINC(1,I)                                                106
         K = MINC(2,I)                                                107
         DO 30 L=1,3                                                  108
            MCODE(L,I) = JCODE(L,J)                                   109
            MCODE(L+3,I) = JCODE(L,K)                                 110
   30    CONTINUE                                                     111
   40 CONTINUE                                                       112
C                                                                    113
C COMPUTE THE HALF BANDWIDTH "MBAND"                                 114
C                                                                    115
      MBD = 0                                                        116
      DO 90 II = 1,NE                                                117
         DO 80 IJ=1,6                                                118
            DO 85 IK=IJ+1,6                                          119
               K = MCODE(IJ,II)                                      120
               L = MCODE(IK,II)                                      121
               IF(K.NE.0.AND.L.NE.0)THEN                             122
                  MT = IABS(K-L)                                     123
               END IF                                                124
               IF(MT.GT.MBD)MBD=MT                                   125
   85       CONTINUE                                                 126
```



```
   80    CONTINUE                                                    127
   90 CONTINUE                                                       128
      RETURN                                                         129
      END                                                            130
C                                                                    131
C SUB PROGRAM PROPERTIES                                             132
C                                                                    133
      SUBROUTINE PROP                                                134
      COMMON F(6,150),P(3,125),SS(350,25),Q(350),AREA(150),ZI(150)   135
      COMMON EMOD(150),ELENG(150),C1(150),C2(150),MCODE(6,150),X(2,125) 136
      COMMON JCODE(3,125),MINC(2,150),NA(150),D(6),DK(6),G(7)         137
      COMMON DJ(3,125),NE,NJ,NLC,LC                                  138
      COMMON MBD,NEQ                                                 139
C                                                                    140
C INPUT KOORDINAT TITIK BUHUL                                        141
C                                                                    142
C*******************************************                        143
      DO 10 K=1,NJ                                                   144
         READ(2,*)K,X(1,K),X(2,K)                                    145
  10  CONTINUE                                                       146
C*******************************************                        147
  15  DO 20 I=1,NE                                                   148
            J = MINC(1,I)                                            149
            K = MINC(2,I)                                            150
            EL1 = X(1,K)-X(1,J)                                      151
            EL2 = X(2,K)-X(2,J)                                      152
            ELENG(I) = SQRT(EL1**2 + EL2**2)                         153
            C1(I) = EL1/ELENG(I)                                     154
            C2(I) = EL2/ELENG(I)                                     155
   20 CONTINUE                                                       156
      RETURN                                                         157
      END                                                            158
C                                                                    159
C SUB PROGRAM LOAD                                                   160
C                                                                    161
      SUBROUTINE LOAD                                                162
      COMMON F(6,150),P(3,125),SS(350,25),Q(350),AREA(150),ZI(150)   163
      COMMON EMOD(150),ELENG(150),C1(150),C2(150),MCODE(6,150),X(2,125) 164
      COMMON JCODE(3,125),MINC(2,150),NA(150),D(6),DK(6),G(7)         165
      COMMON DJ(3,125),NE,NJ,NLC,LC                                  166
      COMMON MBD,NEQ                                                 167
C                                                                    168
```

```
      DO 10 K=1,NEQ                                                    169
         Q(K)=0.                                                       170
   10 CONTINUE                                                         171
C                                                                      172
      DO 30 I=1,NE                                                     173
         NA(I)=0                                                       174
         DO 20 L=1,6                                                   175
            F(L,I)=0.                                                  176
   20    CONTINUE                                                      177
   30 CONTINUE                                                         178
C                                                                      179
      CALL JLOAD                                                       180
      CALL MACT                                                        181
      RETURN                                                           182
      END                                                              183
C                                                                      184
C SUB PROGRAM JOINT LOADING                                            185
C                                                                      186
      SUBROUTINE JLOAD                                                 187
      COMMON F(6,150),P(3,125),SS(350,25),Q(350),AREA(150),ZI(150)     188
      COMMON EMOD(150),ELENG(150),C1(150),C2(150),MCODE(6,150),X(2,125) 189
      COMMON JCODE(3,125),MINC(2,150),NA(150),D(6),DK(6),G(7)           190
      COMMON DJ(3,125),NE,NJ,NLC,LC                                    191
      COMMON MBD,NEQ                                                   192
C                                                                      193
C##############################                                       194
    5 READ(2,*)JNUM,JDIR,FORCE                                         195
C##############################                                       196
        IF(JNUM.NE.0)THEN                                              197
           K = JCODE(JDIR,JNUM)                                        198
           Q(K) = FORCE                                                199
           GO TO 5                                                     200
        END IF                                                         201
C                                                                      202
      RETURN                                                           203
      END                                                              204
C                                                                      205
C SUB PROGRAM MEMBER ACTION                                            206
C                                                                      207
      SUBROUTINE MACT                                                  208
      COMMON F(6,150),P(3,125),SS(350,25),Q(350),AREA(150),ZI(150)     209
      COMMON EMOD(150),ELENG(150),C1(150),C2(150),MCODE(6,150),X(2,125) 210
```



```
      COMMON JCODE(3,125),MINC(2,150),NA(150),D(6),DK(6),G(7)           211
      COMMON DJ(3,125),NE,NJ,NLC,LC                                    212
      COMMON MBD,NEQ                                                   213
C                                                                      214
C##############################                                       215
   10 READ(2,*)MN,MAT,ACT,DIST                                         216
C##############################                                       217
      IF(MN.NE.0)THEN                                                  218
      NA(MN)=NA(MN)+1                                                  219
         IF(MAT.EQ.1)THEN                                              220
            A = DIST/ELENG(MN)                                         221
            F(1,MN) = F(1,MN)                                          222
            F(2,MN) = F(2,MN) + ACT*(-1.-A**2*(2.*A-3.))               223
            F(3,MN) = F(3,MN) + ACT*(-DIST*(1.-A)**2)                  224
            F(4,MN) = F(4,MN)                                          225
            F(5,MN) = F(5,MN) + ACT*(A**2*(2.*A-3.))                   226
            F(6,MN) = F(6,MN) + ACT*(ELENG(MN)*A**2*(1.-A))            227
         ELSE IF(MAT.EQ.2)THEN                                         228
            A=DIST/ELENG(MN)                                           229
            EL = ELENG(MN)/12.                                         230
            XP = ACT*ELENG(MN)                                         231
            F(1,MN) = F(1,MN)                                          232
            F(2,MN) = F(2,MN) + XP*(-.5*(1.-A**4+2.*A**3-2.*A))        233
            F(3,MN) = F(3,MN) + XP*(-EL*(1.-3.*A**4+8.*A**3-6.*A**2))  234
            F(4,MN) = F(4,MN)                                          235
            F(5,MN) = F(5,MN) + XP*(-.5*(1.+A**4-2.*A**3))             236
            F(6,MN) = F(6,MN) + XP*(EL*(1.+3.*A**4-4.*A**3))           237
         END IF                                                        238
         GO TO 10                                                      239
      END IF                                                           240
   20 CALL ASSEMF                                                      241
      RETURN                                                           242
      END                                                              243
C                                                                      244
C SUB PROGRAM ASSEMBLAGE FORCE MATRIX                                  245
C                                                                      246
      SUBROUTINE ASSEMF                                                247
      COMMON F(6,150),P(3,125),SS(350,25),Q(350),AREA(150),ZI(150)     248
      COMMON EMOD(150),ELENG(150),C1(150),C2(150),MCODE(6,150),X(2,125) 249
      COMMON JCODE(3,125),MINC(2,150),NA(150),D(6),DK(6),G(7)           250
      COMMON DJ(3,125),NE,NJ,NLC,LC                                    251
      COMMON MBD,NEQ                                                   252
```

```
C                                                                       253
C STATEMENT FUNCTION                                                    254
C                                                                       255
      FG(C1I,C2I,FLX,FLY)=C1I*FLX+C2I*FLY                               256
C                                                                       257
      DO 20 I=1,NE                                                      258
         IF(NA(I).NE.0)THEN                                             259
            DO 10 L=1,6                                                 260
               K=MCODE(L,I)                                             261
               IF(K.NE.0)THEN                                           262
                 IF(L.EQ.1)THEN                                         263
                   Q(K)=Q(K)-FG(C1(I),-C2(I),F(1,I),F(2,I))             264
                 ELSE IF(L.EQ.2)THEN                                    265
                   Q(K)=Q(K)-FG(C2(I),C1(I),F(1,I),F(2,I))              266
                 ELSE IF(L.EQ.3)THEN                                    267
                   Q(K)=Q(K)-F(3,I)                                     268
                 ELSE IF(L.EQ.4)THEN                                    269
                   Q(K)=Q(K)-FG(C1(I),-C2(I),F(4,I),F(5,I))             270
                 ELSE IF(L.EQ.5)THEN                                    271
                   Q(K)=Q(K)-FG(C2(I),C1(I),F(4,I),F(5,I))              272
                 ELSE                                                   273
                   Q(K)=Q(K)-F(6,I)                                     274
                 END IF                                                 275
               END IF                                                   276
   10       CONTINUE                                                    277
         END IF                                                         278
   20 CONTINUE                                                          279
      RETURN                                                            280
      END                                                               281
C                                                                       282
C SUB PROGRAM SYSTEM                                                    283
C                                                                       284
      SUBROUTINE SYSTEM                                                 285
      COMMON F(6,150),P(3,125),SS(350,25),Q(350),AREA(150),ZI(150)      286
      COMMON EMOD(150),ELENG(150),C1(150),C2(150),MCODE(6,150),X(2,125) 287
      COMMON JCODE(3,125),MINC(2,150),NA(150),D(6),DK(6),G(7)           288
      COMMON DJ(3,125),NE,NJ,NLC,LC                                     289
      COMMON MBD,NEQ                                                    290
C                                                                       291
      IF(LC.EQ.1)THEN                                                   292
        CALL STIFF                                                      293
      END IF                                                            294
```



```
      CALL SOLVE                                                        295
      RETURN                                                            296
      END                                                               297
C                                                                       298
C SUB PROGRAM STIFFNES                                                  299
C                                                                       300
      SUBROUTINE STIFF                                                  301
      COMMON F(6,150),P(3,125),SS(350,25),Q(350),AREA(150),ZI(150)      302
      COMMON EMOD(150),ELENG(150),C1(150),C2(150),MCODE(6,150),X(2,125) 303
      COMMON JCODE(3,125),MINC(2,150),NA(150),D(6),DK(6),G(7)           304
      COMMON DJ(3,125),NE,NJ,NLC,LC                                     305
      COMMON MBD,NEQ                                                    306
      DIMENSION INDEX(6,6),ALPHA(150),ALBET(150)                        307
      DATA INDEX/1,2,4,-1,-2,4,2,3,5,-2,-3,5,4,5,6,-4,-5,7,             308
     $          -1,-2,-4,1,2,-4,-2,-3,-5,2,3,-5,4,5,7,-4,-5,6/         309
C                                                                       310
      DO 2 J=1,NEQ                                                      311
         DO 1 I=1,MBD+1                                                 312
           SS(I,J)=0.                                                   313
    1    CONTINUE                                                      314
    2 CONTINUE                                                          315
C                                                                       316
      DO 30 N = 1,NE                                                    317
         ALPHA(N)=EMOD(N)*ZI(N)/(ELENG(N)**3)                           318
         ALBET(N)=EMOD(N)*AREA(N)/ELENG(N)                              319
         G(1)=ALBET(N)*C1(N)**2+12.*ALPHA(N)*C2(N)**2                   320
         G(2)=ALBET(N)*C1(N)*C2(N)-12.*ALPHA(N)*C1(N)*C2(N)             321
         G(3)=ALBET(N)*C2(N)**2+12.*ALPHA(N)*C1(N)**2                   322
         G(4)=-ALPHA(N)*6.*ELENG(N)*C2(N)                               323
         G(5)=ALPHA(N)*6.*ELENG(N)*C1(N)                                324
         G(6)=ALPHA(N)*4.*ELENG(N)**2                                   325
         G(7)=ALPHA(N)*2.*ELENG(N)**2                                   326
C                                                                       327
C ASSEMBLAGE STIFFNESS (FAKTORISASI)                                    328
C                                                                       329
      DO 20 JE=1,6                                                      330
         J=MCODE(JE,N)                                                  331
         IF(J.EQ.0)GO TO 20                                             332
            DO 10 IE=JE,6                                               333
               I=MCODE(IE,N)                                            334
               IF(I.EQ.0)GO TO 10                                       335
                  K=I-J+1                                               336
```

```
                L=IABS(INDEX(JE,IE))                                          337
                LL=INDEX(JE,IE)/L                                             338
                SS(J,K)=SS(J,K)+G(L)*FLOAT(LL)                                339
   10       CONTINUE                                                          340
   20 CONTINUE                                                               341
   30 CONTINUE                                                               342
      RETURN                                                                 343
      END                                                                    344
C                                                                            345
C SUB PROGRAM SOLVING OF EQUATION                                            346
C                                                                            347
      SUBROUTINE SOLVE                                                       348
      COMMON F(6,150),P(3,125),SS(350,25),Q(350),AREA(150),ZI(150)           349
      COMMON EMOD(150),ELENG(150),C1(150),C2(150),MCODE(6,150),X(2,125)       350
      COMMON JCODE(3,125),MINC(2,150),NA(150),D(6),DK(6),G(7)                 351
      COMMON DJ(3,125),NE,NJ,NLC,LC                                          352
      COMMON MBD,NEQ                                                         353
      INTEGER HBW                                                            354
C                                                                            355
      IF(LC.NE.1)GO TO 800                                                   356
      HBW=MBD+1                                                              357
      DO 790 N=1,NEQ                                                         358
         DO 780 L=2,HBW                                                      359
            IF(SS(N,L).EQ.0.)GO TO 780                                       360
               I=N+L-1                                                       361
               SUS=SS(N,L)/SS(N,1)                                           362
               J=0                                                           363
               DO 750 K=L,HBW                                                364
                  J=J+1                                                      365
                  SS(I,J)=SS(I,J)-SUS*SS(N,K)                                366
  750          CONTINUE                                                      367
               SS(N,L)=SUS                                                   368
  780     CONTINUE                                                           369
  790 CONTINUE                                                               370
  800 DO 830 N=1,NEQ                                                         371
         DO 820 L=2,HBW                                                      372
            IF(SS(N,L).EQ.0.)GO TO 820                                       373
               I=N+L-1                                                       374
               Q(I)=Q(I)-SS(N,L)*Q(N)                                        375
  820    CONTINUE                                                           376
         Q(N)=Q(N)/SS(N,1)                                                   377
  830 CONTINUE                                                               378
```



```
      DO 860 M=2,NEQ                                                         379
         N=NEQ+1-M                                                           380
         DO 850 L=2,HBW                                                      381
            IF(SS(N,L).EQ.0.)GO TO 850                                       382
               K=N+L-1                                                       383
               Q(N)=Q(N)-SS(N,L)*Q(K)                                        384
  850    CONTINUE                                                           385
  860 CONTINUE                                                               386
      RETURN                                                                 387
      END                                                                    388
C                                                                            389
C SUB PROGRAM RESULT                                                         390
C                                                                            391
      SUBROUTINE RESULT                                                      392
      COMMON F(6,150),P(3,125),SS(350,25),Q(350),AREA(150),ZI(150)           393
      COMMON EMOD(150),ELENG(150),C1(150),C2(150),MCODE(6,150),X(2,125)       394
      COMMON JCODE(3,125),MINC(2,150),NA(150),D(6),DK(6),G(7)                 395
      COMMON DJ(3,125),NE,NJ,NLC,LC                                          396
      COMMON MBD,NEQ                                                         397
C                                                                            398
      DO 20 J=1,NJ                                                           399
         DO 10 L=1,3                                                         400
            P(L,J)=0.                                                        401
   10    CONTINUE                                                           402
   20 CONTINUE                                                               403
C                                                                            404
      CALL FORCES                                                            405
      CALL OUTPUT                                                            406
C                                                                            407
      RETURN                                                                 408
      END                                                                    409
C                                                                            410
C SUB PROGRAM FORCES                                                         411
C                                                                            412
      SUBROUTINE FORCES                                                      413
      COMMON F(6,150),P(3,125),SS(350,25),Q(350),AREA(150),ZI(150)           414
      COMMON EMOD(150),ELENG(150),C1(150),C2(150),MCODE(6,150),X(2,125)       415
      COMMON JCODE(3,125),MINC(2,150),NA(150),D(6),DK(6),G(7)                 416
      COMMON DJ(3,125),NE,NJ,NLC,LC                                          417
      COMMON MBD,NEQ                                                         418
      COMMON I                                                               419
C                                                                            420
```

```
      DO 10 I=1,NE                                                          421
         CALL ELEMF                                                         422
         CALL JOINTF                                                        423
   10 CONTINUE                                                              424
      RETURN                                                                425
      END                                                                   426
C                                                                           427
C SUB PROGRAM ELEMENT FORCE                                                 428
C                                                                           429
      SUBROUTINE ELEMF                                                      430
      COMMON F(6,150),P(3,125),SS(350,25),Q(350),AREA(150),ZI(150)          431
      COMMON EMOD(150),ELENG(150),C1(150),C2(150),MCODE(6,150),X(2,125)      432
      COMMON JCODE(3,125),MINC(2,150),NA(150),D(6),DK(6),G(7)                433
      COMMON DJ(3,125),NE,NJ,NLC,LC                                         434
      COMMON MBD,NEQ                                                        435
      COMMON I                                                              436
C                                                                           437
      DO 10 L=1,6                                                           438
         K=MCODE(L,I)                                                       439
         IF(K.NE.0)THEN                                                     440
            D(L) = Q(K)                                                     441
         ELSE IF(K.EQ.0)THEN                                                442
            D(L) = 0.                                                       443
         END IF                                                             444
   10 CONTINUE                                                              445
C                                                                           446
      DK(1)=C1(I)*D(1)+C2(I)*D(2)                                           447
      DK(2)=-C2(I)*D(1)+C1(I)*D(2)                                          448
      DK(3)=D(3)                                                            449
      DK(4)=C1(I)*D(4)+C2(I)*D(5)                                           450
      DK(5)=-C2(I)*D(4)+C1(I)*D(5)                                          451
      DK(6)=D(6)                                                            452
C                                                                           453
      A=EMOD(I)*ZI(I)/(ELENG(I)**3)                                         454
      B=EMOD(I)*AREA(I)/ELENG(I)                                            455
      F1=B*(DK(1)-DK(4))                                                    456
      F2=A*(12.*(DK(2)-DK(5))+6.*ELENG(I)*(DK(3)+DK(6)))                    457
      F3=A*(6.*ELENG(I)*(DK(2)-DK(5))+2.*ELENG(I)**2*(2.*DK(3)+DK(6)))      458
      F6=F2*ELENG(I)-F3                                                     459
C                                                                           460
      F(1,I)=F(1,I)+F1                                                      461
      F(2,I)=F(2,I)+F2                                                      462
```



```
      F(3,I)=F(3,I)+F3                                                      463
      F(4,I)=F(4,I)-F1                                                      464
      F(5,I)=F(5,I)-F2                                                      465
      F(6,I)=F(6,I)+F2*ELENG(I)-F3                                          466
C                                                                           467
      RETURN                                                                468
      END                                                                   469
C                                                                           470
C SUB PROGRAM JOINT FORCE                                                   471
C                                                                           472
      SUBROUTINE JOINTF                                                     473
      COMMON F(6,150),P(3,125),SS(350,25),Q(350),AREA(150),ZI(150)          474
      COMMON EMOD(150),ELENG(150),C1(150),C2(150),MCODE(6,150),X(2,125)      475
      COMMON JCODE(3,125),MINC(2,150),NA(150),D(6),DK(6),G(7)                476
      COMMON DJ(3,125),NE,NJ,NLC,LC                                         477
      COMMON MBD,NEQ                                                        478
      COMMON I                                                              479
C                                                                           480
C STATEMENT FUNCTION                                                        481
C                                                                           482
      FG(C1I,C2I,FLX,FLY)=C1I*FLX+C2I*FLY                                   483
C                                                                           484
      J=MINC(1,I)                                                           485
      K=MINC(2,I)                                                           486
C                                                                           487
      P(1,J)=P(1,J)+FG(C1(I),-C2(I),F(1,I),F(2,I))                          488
      P(2,J)=P(2,J)+FG(C2(I),C1(I),F(1,I),F(2,I))                           489
      P(3,J)=P(3,J)+F(3,I)                                                  490
C                                                                           491
      P(1,K)=P(1,K)+FG(C1(I),-C2(I),F(4,I),F(5,I))                          492
      P(2,K)=P(2,K)+FG(C2(I),C1(I),F(4,I),F(5,I))                           493
      P(3,K)=P(3,K)+F(6,I)                                                  494
C                                                                           495
      RETURN                                                                496
      END                                                                   497
C                                                                           498
C SUB PROGRAM OUTPUT                                                        499
C                                                                           500
      SUBROUTINE OUTPUT                                                     501
      COMMON F(6,150),P(3,125),SS(350,25),Q(350),AREA(150),ZI(150)          502
      COMMON EMOD(150),ELENG(150),C1(150),C2(150),MCODE(6,150),X(2,125)      503
      COMMON JCODE(3,125),MINC(2,150),NA(150),D(6),DK(6),G(7)                504
```

```
      COMMON DJ(3,125),NE,NJ,NLC,LC                                    505
      COMMON MBD,NEQ                                                   506
C                                                                      507
      WRITE(3,90)LC                                                    508
      WRITE(3,100)                                                     509
      WRITE(3,500)                                                     510
      WRITE(3,200)                                                     511
      WRITE(3,600)                                                     512
      WRITE(3,100)                                                     513
      DO 20 I=1,NJ                                                     514
         DO 10 J=1,3                                                   515
            K=JCODE(J,I)                                               516
            IF(K.NE.0)THEN                                             517
               DJ(J,I)=Q(K)                                            518
            ELSE IF(K.EQ.0)THEN                                        519
               DJ(J,I)=0.                                              520
            END IF                                                     521
   10    CONTINUE                                                      522
C                                                                      523
      WRITE(3,111)I,DJ(1,I),DJ(2,I),DJ(3,I)                           524
   20 CONTINUE                                                         525
      WRITE(3,100)                                                     526
      WRITE(3,333)                                                     527
C                                                                      528
      WRITE(3,300)                                                     529
      WRITE(3,700)                                                     530
      WRITE(3,400)                                                     531
      WRITE(3,800)                                                     532
      WRITE(3,300)                                                     533
      DO 30 K=1,NE                                                     534
         WRITE(3,222)K,F(1,K),F(2,K),F(3,K),F(4,K),F(5,K),F(6,K)       535
   30 CONTINUE                                                         536
      WRITE(3,300)                                                     537
      WRITE(3,333)                                                     538
C                                                                      539
      WRITE(3,100)                                                     540
      WRITE(3,900)                                                     541
      WRITE(3,200)                                                     542
      WRITE(3,600)                                                     543
      WRITE(3,100)                                                     544
      DO 40 J=1,NJ                                                     545
         WRITE(3,111)J,P(1,J),P(2,J),P(3,J)                            546
```



```
   40 CONTINUE                                                         547
      WRITE(3,100)                                                     548
      WRITE(3,333)                                                     549
C                                                                      550
   90 FORMAT(///,6X,'Load Condition number :',I3/)                     551
  100 FORMAT(6X,47('-'))                                               552
  200 FORMAT(13X,40('-'))                                              553
  300 FORMAT(6X,73('-'))                                               554
  400 FORMAT(14X,65('-'))                                              555
  500 FORMAT(23X,'Joint Displacements')                                556
  600 FORMAT(6X,'Joint   Direction 1   Direction 2   Direction 3')     557
  700 FORMAT(37X,'Local Element Forces')                               558
  800 FORMAT(6X,'Element',5X,'f1',9X,'f2',9X,'f3',9X,'f4',9X,'f5',9X,  559
     $                    'f6')                                         560
  900 FORMAT(26X,'Joint Forces')                                       561
  111 FORMAT(6X,I4,3(4X,E10.3))                                        562
  222 FORMAT(6X,I5,6(1X,E10.3))                                        563
  333 FORMAT(' ')                                                      564
      RETURN                                                           565
      END                                                              566
```

3.1. Penjelasan Program Komputer

Baris 1 – 34 : PROGRAM UTAMA
Sesuai gambar 3.1, terdiri atas 3 buah sub program DATA, SYSTEM dan RESULT.

Baris 23 : Input data NE, NJ dan NLC
NE = Jumlah batang ("Number of Element")
NJ = Jumlah titik buhul ("Number of Joint")
NLC = Jumlah kondisi pembebanan
("Number of Load Condition")

Baris 36 – 51 : SUB PROGRAM DATA
Sesuai gambar 3.1, terdiri atas 2 buah sub program STRUCT dan LOAD.

Baris 46 – 50 : Sub program STRUCT cukup dipakai 1 kali, sedang sub program LOAD dipakai berkali-kali untuk setiap proses hitungan yang terdiri lebih dari satu kondisi pembebanan. Hal ini berarti bahwa data strukturnya *tidak perlu dihitung berulang-ulang* untuk lebih dari satu kondisi pembebanan.

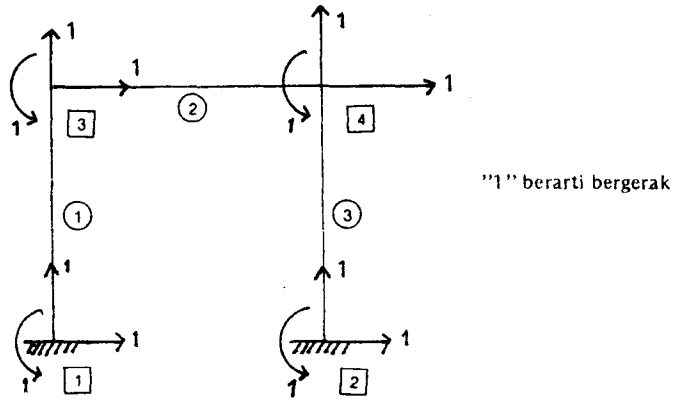
Baris 53 – 84 : SUB PROGRAM STRUCT.

Baris 62 – 66 : Input data struktur, yaitu :

I = Nomor batang
MINC(1,I) = Nomor titik buhul kiri/kecil
MINC(2,I) = Nomor titik buhul kanan/besar
AREA(I) = Luas tampang batang
ZI(I) = Momen inersia batang
EMOD(I) = Modulus Elastis batang

Baris 68 – 72 : Semua titik buhul yang ada dianggap bisa bergerak bebas (tidak ada kekangan/konstrain).

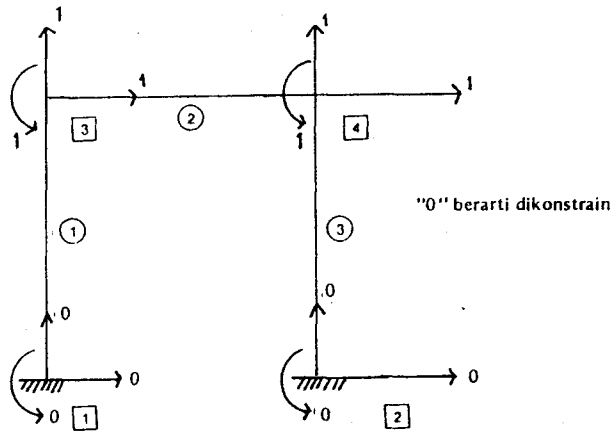
Contoh :



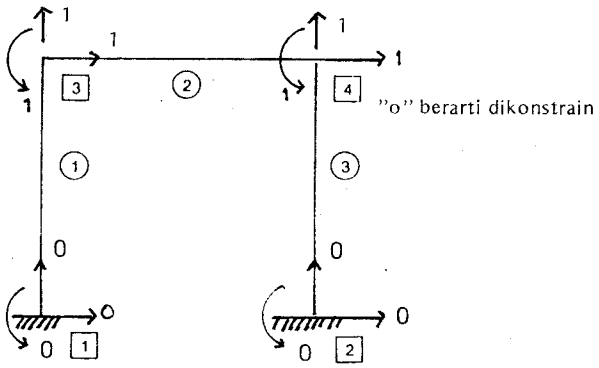
GAMBAR 3.2 STRUKTUR TANPA KONSTRAIN

Baris 74 : Input kekangan/konstrain
INUM = Nomor titik buhul yang dikonstrain
IDIR = Arah kekangan/konstrain
Contoh : Gambar 3.2 diatas

1	1	Pada titik buhul 1 dijepit atau
1	2	dikonstrain dalam arah 1, 2 dan 3
1	3	
2	1	
2	2	Titik 2 – idem –
2	3	



baris 76 – 79 : Titik buhul dengan arah yang dikonstrain, JCODE nya dimatikan/dinolkan, sehingga gambar 3.2 menjadi:



GAMBAR 3.3 STRUKTUR DENGAN KONSTRAIN

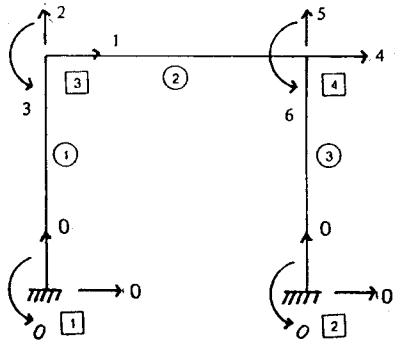
Baris 86 – 130 : SUB PROGRAM CODES

Baris 86–103 : SUB PROGRAM CODES

Sub program ini untuk menentukan JCODE, MCODE dan MBD (MBAND)

Baris 95–103 : – Mengubah angka 1 pada JCODE menjadi penjumlahannya, sebagai contoh dari gambar 3.3 dirubah menjadi

JCODE(1) = [0 0 0]
JCODE(2) = [0 0 0]
JCODE(3) = [1 2 3]
JCODE(4) = [4 5 6]



GAMBAR 3.4 JCODE DIJUMLAHKAN

– Setelah dijumlahkan maka akan diperoleh NEQ ("Number of EQUATION" = JUMLAH PERSAMAAN SIMULTAN)

Baris 105–112 : Menentukan MCODE, sehingga untuk contoh diatas akan diperoleh:

MCODE(1) = [0 0 0 1 2 3]
MCODE(2) = [1 2 3 4 5 6]
MCODE(3) = [0 0 0 4 5 6]

Baris 114–130 : – Menghitung MBAND dari matriks kekakuan system struktur, untuk contoh diatas maka :

$$MBD = 6 - 1 = 5.$$

(MBD dipakai untuk menghemat memori dalam komputer).

Baris 132–158 : SUB PROGRAM PROP.

Sub program ini dipakai untuk input data koordinat titik-titik buhul dan menghitung matriks transformasi batang.

Baris 144–146 : Input data koordinat

K = Nomor titik buhul
X(1, K) = Absis
X(2, K) = Ordinat

Baris 148–156 : Sesuai dengan persamaan 2.55, maka

$c1(I) = \cos\theta = c$
$c2(I) = \sin\theta = s$

Baris 160–183 : SUB PROGRAM LOAD

Pembebanan disini dibedakan atas 2 macam, yaitu beban pada titik buhul (sub program JLOAD) dan beban pada batang (sub program MACT).

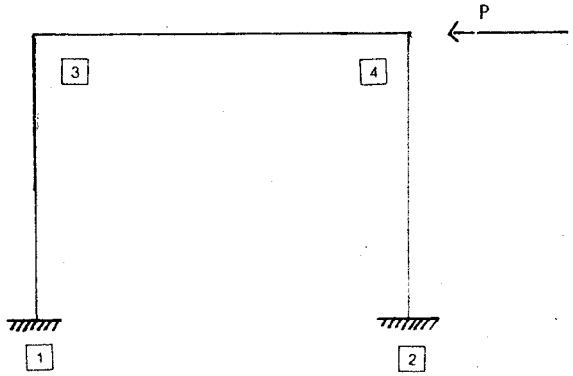
Baris 185–204 : SUB PROGRAM JLOAD

Baris 195–201 : Input data beban pada titik buhul

JNUM : "JOINT NUMBER" yaitu nomor titik buhul.
JDIR : "JOINT DIRECTION" yaitu arah pembebanan.
1 : arah datar
2 : arah vertikal
3 : arah momen
FORCE : besar gaya, dengan arah positif kekanan, keatas, berlawanan arah jarum jam.

Nampak pada baris 199 bahwa motasi beban luar dipakai Q(K). Dalam hal K menunjukkan nomor derajat kebebasan pada arah beban tersebut, sesuai dengan gambar 3.4.

Contoh.



GAMBAR 3.5 BEBAN TITIK

Dengan bantuan JCODE pada gambar 3.4 maka diperoleh:

$$Q(4) = -P$$

Tanda "–" berarti arah kekiri.

Baris 206–243 : SUB PROGRAM MACT

Baris 216 : Input data beban pada batang
- MN : Nomor batang
- MAT : Macam / Tipe pembebanan
  - 1 = beban terpusat
  - 2 = beban terbagi rata
- ACT : Besar beban
- DIST : Jarak dari titik kiri

Baris 220–238 : Untuk menghitung "fixed and forces" sesuai dengan pers 2.78 dan 2.79.

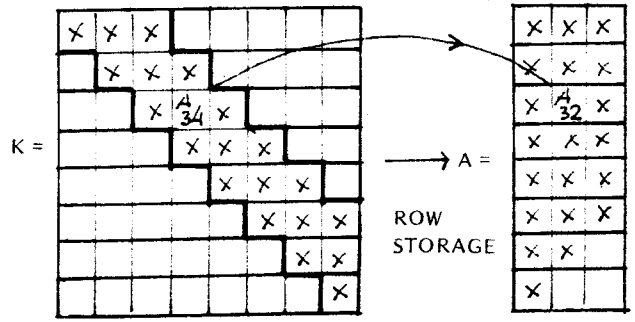
Baris 245–281 : SUB PROGRAM ASSEMF
Sub program ini dipakai untuk menyusun matriks beban luar total yang merupakan penggabungan dari beban pada titik buhul dan beban pada batang.

Baris 283–297 : SUB PROGRAM SYSTEM
Sub program ini dipakai untuk membentuk matriks kekakuan system struktur (dengan sub program STIFF) sehingga diperoleh persamaan simultan system struktur. Sedang sub program SOLVE dipakai untuk menyelesaikan persamaan simultan tersebut.

Baris 299–344 : SUB PROGRAM STIFF

Baris 317–326 : Matriks kekakuan masing-masing batang pada sistem koordinat global (sesuai pers 2.71 dan pers 2.71a).

Baris 328–342 : Penyusunan matriks kekakuan system struktur secara "banded". Secara skematis dapat ditunjukkan sebagai berikut.



$$K_{ij} = A_{ik'} \quad k = j - i + 1$$

GAMBAR 3.6 "BAND STORAGE"

Baris 346–388 : SUB PROGRAM SOLVE
Persamaan simultan yang diperoleh dari sub program SYSTEM diselesaikan dengan sub program SOLVE. Vektor matriks Q yang semula sebagai vektor matriks beban luar, keluar dari sub program SOLVE sebagai vektor matriks displesemen (Q(I), I = 1, NEQ).

Baris 390–409 : SUB PROGRAM RESULT
Sub program ini dipakai untuk menghitung gaya batang, gaya titik buhul (dengan sub program FORCES) dan menyajikan hasil hitungan (dengan sub program OUTPUT).

Baris 411–426 : SUB PROGRAM FORCES
Sub program ini terdiri 2 bagian, yaitu :
- sub program ELEMF, untuk menghitung gaya batang.
- sub program JOINTF, untuk menghitung gaya pada titik buhul.

Baris 428–469 : SUB PROGRAM ELEMF

Baris 438–445 : Menyusun matriks displesemen masing-masing batang pada sistem koordinat global. Matriks displesemen tersebut diambil dari matriks displesemen sistem struktur dengan bantuan MCODE masing-masing batang (perhatikan baris 439 dan baris 441).

Baris 447–452 : Menghitung matriks displesemen masing-masing batang pada sistem koordinat lokal ($d = \Lambda D$).

Baris 454–466 : Menghitung gaya batang ($f = k\,d$)
k = matriks kekakuan batang pada sistem koordinat lokal.

Baris 471–497 : SUB PROGRAM JOINTF

Baris 483 : Sebuah fungsi untuk menghitung gaya titik buhul, yaitu dengan rumus :

$$P = \lambda^T f$$

Baris 488–490 : Menghitung gaya titik buhul pada ujung batang dengan nomor titik buhul kecil.

Baris 492–494 : Menghitung gaya titik buhul pada ujung batang dengan nomor titik buhul besar.

Baris 499–566 : SUB PROGRAM OUTPUT
Sub program ini digunakan untuk menyajikan hasil hitungan.

Baris 515–522 : Menyusun matriks displesemen masing-masing titik buhul pada sistem koodinat global. Matriks displesemen tersebut diambil dari matriks displesemen sistem struktur dengan bantuan JCODE masing-masing titik buhul (perhatikan baris 516 dan 518).

Baris 524 : Untuk menuliskan matriks displesemen masing-masing titik buhul.

Baris 535 : Untuk menuliskan gaya-gaya batang.

Baris 546 : Untuk menuliskan gaya pada titik buhul.

3.2 Penyusunan Input Data

1. Data konstruksi / lihat baris 23 pada Program Komputer)

JUMLAH BATANG (NE)	JUMLAH TITIK (NJ)	JUMLAH TYPE PEMBEBANAN (NLC)

2. Data batang (lihat baris 64) :

NO BATANG	NO UJUNG 1	NO UJUNG 2	LUAS TAMPANG	MOMEN INERSIA	MODULUS ELASTIS
(I)	MINC(1,I)	MINC(2,I)	AREA(I)	EI (I)	EMOD(I)

3. Data batang (lihat baris 64) :

NO TITIK (JNUM)	ARAH (1, 2, 3) (JDIR)

1 : arah horisontal
2 : arah vertikal
3 : arah putaran

* Tulis angka 0 (nol) sebagai akhir data.

4. Data koordinat (lihat baris 145)

NO TITIK K	X X(1, K)	Y X(2, K)

5. Data pembebanan pada titik (lihat baris 195)

NO TITIK (JNUM)	ARAH (1,2,3) (JDIR)	BESAR GAYA (FORCE)

1 : Gaya Horison[al
1 : Gaya Horisontal
2 : Gaya Vertikal
3 : Momen

* Tulis angka 0 (nol) sebagai akhir data.

6. Data pembebanan pada batang (lihat baris 216)

NO BATANG (MN)	JENIS BEBAN (MAT)	BESAR BEBAN (ACT)	JARAK (DIST)

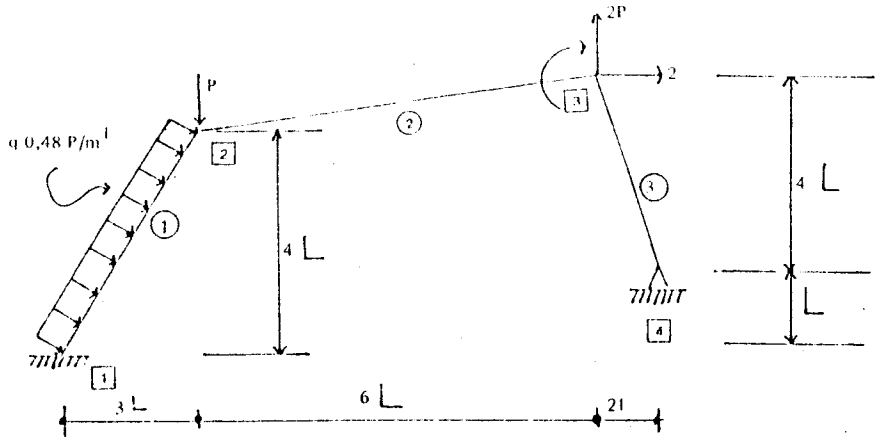
1 : Beban titik
2 : Beban terbagi rata

* Tulis angka 0 (nol) sebagai akhir data.

BAB IV
APLIKASI PROGRAM KOMPUTER

Di bawah ini akan diberikan contoh penggunaan program komputer pada beberapa jenis konstruksi, yaitu: konstruksi portal bidang, konstruksi rangka bidang dan sebuah konstruksi dengan beberapa kondisi pembebanan.

4.1. Konstruksi Portal Bidang



E = $70 . 10^6$ k N/m^2 L = 1 m A = 0,02 m^2

I = $3 . 10^{-3}$ m^4 P = 100 k N

GAMBAR 4.1 PORTAL BIDANG

Susunan input data :

```
3    4    1
1    1    2    0.02      0.003      70000000.0
2    2    3    0.02      0.003      70000000.0
3    3    4    0.02      0.003      70000000.0
1    1
1    2
1    3
4    1
4    2
0    0
1    0.0       0.0
2    3.0       4.0
3    9.0       5.0
4    11.0      1.0
2    2       -100.0
3    1        100.0
3    2        200.0
3    3       -150.0
0    0          0.0
1    2        -48.0      0.0
0    0          0.0      0.0
```

Hasil hitungan adalah seperti nampak dibawah ini :

Load Condition number : 1

Joint Displacements

Joint	Direction 1	Direction 2	Direction 3
1	.000E+00	.000E+00	.000E+00
2	.737E-02	-.519E-02	-.134E-03
3	.641E-02	.342E-02	-.269E-03
4	.000E+00	.000E+00	-.230E-02

Local Element Forces

Element	f1	f2	f3	f4	f5	f6
1	-.748E+02	.295E+03	.543E+03	.748E+02	-.549E+02	.332E+03
2	-.108E+03	-.111E+03	-.332E+03	.108E+03	.111E+03	-.341E+03
3	-.604E+02	.427E+02	.191E+03	.604E+02	-.427E+02	-.447E-04

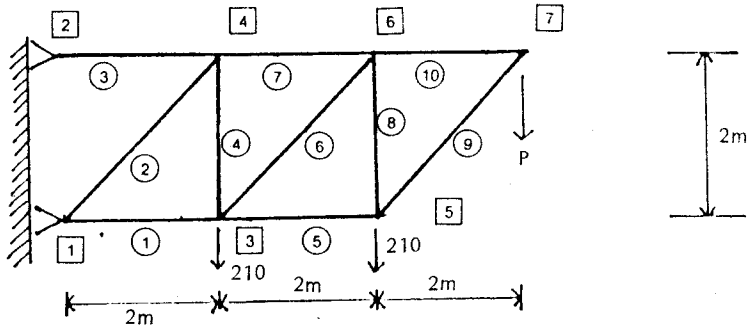
Joint Forces

Joint	Direction 1	Direction 2	Direction 3
1	-.281E+03	.117E+03	.543E+03
2	-.153E-04	-.100E+03	.305E-04
3	.100E+03	.200E+03	-.150E+03
4	-.112E+02	-.731E+02	-.447E-04

4.2. Konstruksi Rangka Bidang

E = 21000000 t / m^2 P = 1 ton

A = 0,002 m^2



E : 21000 000 t/m^2 P : 1 ton

A : 0,002 m^2

GAMBAR 4.2 RANGKA BIDANG

Susunan input data :

10	7	1			
1	1	3	0.002	0.0	21000000.0
2	1	4	0.002	0.0	21000000.0
3	2	4	0.002	0.0	21000000.0
4	3	4	0.002	0.0	21000000.0
5	3	5	0.002	0.0	21000000.0
6	3	6	0.002	0.0	21000000.0
7	4	6	0.002	0.0	21000000.0
8	5	6	0.002	0.0	21000000.0
9	5	7	0.002	0.0	21000000.0
10	6	7	0.002	0.0	21.00000.0

1	1		
1	2		
1	3	⟶	khusus untuk Rangka Bidang
2	1		
2	2		
2	3	⟶	idem
3	3	⟶	idem
4	3	⟶	idem
5	3	⟶	idem
6	3	⟶	idem
7	3	⟶	idem
0	0		
1	0.0	0.0	
2	0.0	2.0	
3	2.0	0.0	
4	2.0	2.0	
5	4.0	0.0	
6	4.0	2.0	
7	6.0	2.0	
3	2	– 2.0	
5	2	– 2.0	
7	2	– 1.0	
0	0	0.0	
0	0	0.0	0.0

Hasil hitungan :

Load Condition number : 1

Joint Displacements

Joint	Direction 1	Direction 2	Direction 3
1	.000E+00	.000E+00	.000E+00
2	.000E+00	.000E+00	.000E+00
3	-.190E-03	-.134E-02	.000E+00
4	.429E-03	-.110E-02	.000E+00
5	-.238E-03	-.270E-02	.000E+00
6	.619E-03	-.255E-02	.000E+00
7	.667E-03	-.374E-02	.000E+00

Local Element Forces

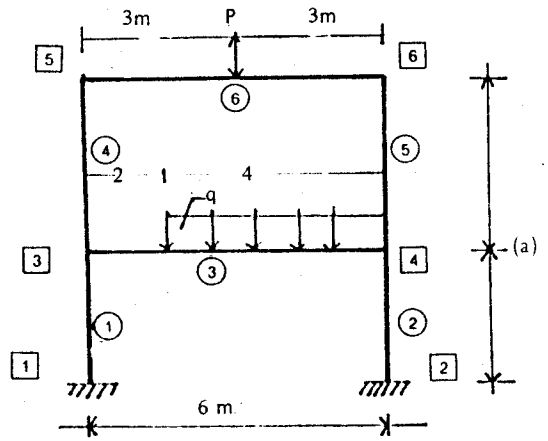
Element	f1	f2	f3	f4	f5	f6
1	.400E+01	.000E+00	.000E+00	-.400E+01	.000E+00	.000E+00
2	.707E+01	.000E+00	.000E+00	-.707E+01	.000E+00	.000E+00
3	-.900E+01	.000E+00	.000E+00	.900E+01	.000E+00	.000E+00
4	-.500E+01	.000E+00	.000E+00	.500E+01	.000E+00	.000E+00
5	.100E+01	.000E+00	.000E+00	-.100E+01	.000E+00	.000E+00
6	.424E+01	.000E+00	.000E+00	-.424E+01	.000E+00	.000E+00
7	-.400E+01	.000E+00	.000E+00	.400E+01	.000E+00	.000E+00
8	-.300E+01	.000E+00	.000E+00	.300E+01	.000E+00	.000E+00
9	.141E+01	.000E+00	.000E+00	-.141E+01	.000E+00	.000E+00
10	-.100E+01	.000E+00	.000E+00	.100E+01	.000E+00	.000E+00

Joint Forces

Joint	Direction 1	Direction 2	Direction 3
1	.900E+01	.500E+01	.000E+00
2	-.900E+01	.000E+00	.000E+00
3	.715E-06	-.200E+01	.000E+00
4	-.238E-06	-.477E-06	.000E+00
5	-.656E-06	-.200E+01	.000E+00
6	.131E-05	.858E-05	.000E+00
7	.250E-05	-.100E+01	.000E+00

4.3. Struktur dengan kondisi pembebanan lebih dari satu.

Kondisi 1 :



E = 70.10^6 k N / m^2

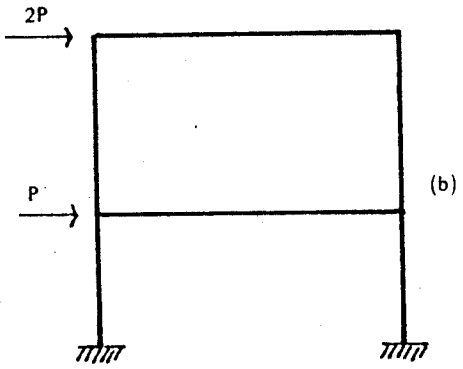
I = 3.10^{-3} m^4

A = 0,02 m^2

P = 100 k N

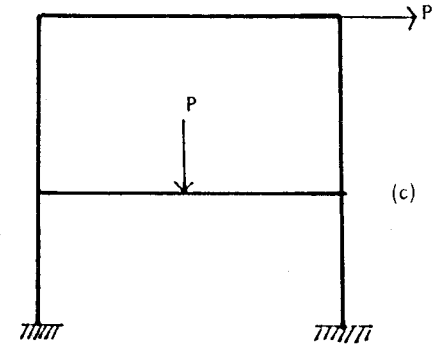
q = 50 k N / m^1

Kondisi 2 :



Kondisi 3 :

Kondisi 3 :



GAMBAR 4.3 : a) Beban vertikal
b) Beban horisontal
c) Kombinasi vertikal dan horisontal

Susunan input data :

```
6   6   3
1   1   3   0.02   0.003   70000000.0
2   2   4   0.02   0.003   70000000.0
3   3   4   0.02   0.003   70000000.0
4   3   5   0.02   0.003   70000000.0
5   4   6   0.02   0.003   70000000.0
6   5   6   0.02   0.003   70000000.0
1   1
1   2
1   3
2   1
2   2
2   3
0   0
```

1	0.0	0.0	
2	6.0	0.0	
3	0.0	4.0	
4	6.0	4.0	
5	0.0	8.0	
6	6.0	8.0	
0	0	0.0	
3	2	− 50.0	2.0
6	1	−100.0	3.0
0	0	0.0	0.0
3	1	100.0	
5	1	200.0	
0	0	0.0	
0	0	0.0	0.0
6	1	100.0	
0	0	0.0	
3	1	−100.0	3.0
0	0	0.0	0.0

Hasil hitungan :

Load Condition number : 1

Joint Displacements

Joint	Direction 1	Direction 2	Direction 3
1	.000E+00	.000E+00	.000E+00
2	.000E+00	.000E+00	.000E+00
3	-.120E-03	-.331E-03	-.143E-03
4	-.648E-04	-.526E-03	.235E-03
5	-.911E-04	-.477E-03	-.238E-03
6	-.215E-03	-.666E-03	.206E-03

Local Element Forces

Element	f1	f2	f3	f4	f5	f6
1	.116E+03	-.160E+02	-.245E+02	-.116E+03	.160E+02	-.395E+02
2	.184E+03	.160E+02	.196E+02	-.184E+03	-.160E+02	.443E+02
3	-.129E+02	.648E+02	.922E+02	.129E+02	.135E+03	-.104E+03
4	.511E+02	-.289E+02	-.527E+02	-.511E+02	.289E+02	-.627E+02
5	.489E+02	.289E+02	.593E+02	-.489E+02	-.289E+02	.562E+02
6	.289E+02	.511E+02	.627E+02	-.289E+02	.489E+02	-.562E+02

Joint Forces

Joint	Direction 1	Direction 2	Direction 3
1	.160E+02	.116E+03	-.245E+02
2	-.160E+02	.184E+03	.196E+02
3	-.381E-05	-.114E-04	-.763E-05
4	.000E+00	-.534E-04	-.305E-04
5	-.381E-05	.381E-05	.763E-05
6	-.572E-05	.000E+00	-.191E-04

Load Condition number : 2

Joint Displacements

Joint	Direction 1	Direction 2	Direction 3
1	.000E+00	.000E+00	.000E+00
2	.000E+00	.000E+00	.000E+00
3	.780E-02	.570E-03	-.197E-02
4	.759E-02	-.570E-03	-.191E-02
5	.170E-01	.789E-03	-.138E-02
6	.166E-01	-.789E-03	-.134E-02

Local Element Forces

Element	f1	f2	f3	f4	f5	f6
1	-.199E+03	.152E+03	.407E+03	.199E+03	-.152E+03	.200E+03
2	.199E+03	.148E+03	.397E+03	-.199E+03	-.148E+03	.196E+03
3	.487E+02	-.123E+03	-.370E+03	-.487E+02	.123E+03	-.366E+03
4	-.768E+02	.100E+03	.170E+03	.768E+02	-.100E+03	.232E+03
5	.768E+02	.996E+02	.169E+03	-.768E+02	-.996E+02	.229E+03
6	.996E+02	-.768E+02	-.232E+03	-.996E+02	.768E+02	-.229E+03

Joint Forces

Joint	Direction 1	Direction 2	Direction 3
1	-.152E+03	-.199E+03	.407E+03
2	-.148E+03	.199E+03	.397E+03
3	.100E+03	.381E-04	.107E-03
4	.153E-03	-.763E-05	.198E-03
5	.200E+03	.763E-05	.153E-04
6	.103E-02	-.229E-04	.229E-03

Load Condition number : 3

Joint Displacements

Joint	Direction 1	Direction 2	Direction 3
1	.000E+00	.000E+00	.000E+00
2	.000E+00	.000E+00	.000E+00
3	.287E-02	.103E-03	-.952E-03
4	.285E-02	-.389E-03	-.638E-03
5	.690E-02	.206E-03	-.548E-03
6	.707E-02	-.492E-03	-.718E-03

Local Element Forces

Element	f1	f2	f3	f4	f5	f6
1	-.361E+02	.378E+02	.126E+03	.361E+02	-.378E+02	.257E+02
2	.136E+03	.622E+02	.158E+03	-.136E+03	-.622E+02	.908E+02
3	.280E+01	.820E-01	-.858E+02	-.280E+01	.999E+02	-.214E+03
4	-.362E+02	.407E+02	.601E+02	.362E+02	-.407E+02	.103E+03
5	.362E+02	.593E+02	.123E+03	-.362E+02	-.593E+02	.114E+03
6	-.407E+02	-.362E+02	-.103E+03	.407E+02	.362E+02	-.114E+03

Joint Forces

Joint	Direction 1	Direction 2	Direction 3
1	-.378E+02	-.361E+02	.126E+03
2	-.622E+02	.136E+03	.158E+03
3	.000E+00	.763E-05	-.305E-04
4	.648E-04	-.763E-05	.153E-04
5	.290E-03	-.381E-05	.229E-04
6	.100E+03	-.114E-04	.610E-04

DAFTAR PUSTAKA

L.L. Bhirud, 1975, *MATRIX OPERATIONS ON THE COMPUTER,* Okford & IBH Publishing Co, New Delhi.

Siegfried M. Holzer, 1985, *COMPUTER ANALYSIS OF STRUCTURES,* Matrix Structural Analysis Structured Programming, Elsevier Science Publishing Co., Inc, New York.

William Weaver, Ir. James M. Gerej, Wira. 1986, *ANALISA MATRIKS UNTUK STRUKTUR RANGKA,* Penerbit Erlangga, Jakarta – Indonesia.

Kardiyono Tjokrodimuljo, 1988, *BAHAN KULIAH PADA KURSUS SINGKAT DI PAU UGM,* Yogyakarta.